

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 3 (55)

2020

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Цунак А. А.</i> Анализ дифракционной эффективности одномерно-периодической дифракционной решетки методом плоских волн (случай ТЕ-поляризации) .....	3
<i>Ивановский Л. И.</i> Динамика одной системы диффузионно связанных дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью .....	15
<i>Гусарова Е. В., Смирнов Ю. Г., Цунак А. А.</i> Об одном методе решения задачи дифракции электромагнитной волны на дифракционной решетке .....	31
<i>Редькина Т. В., Новикова О. В.</i> Преобразования Бэклунда для уравнений Лиувилля с показательной нелинейностью .....	39
<i>Редькина Т. В., Новикова О. В.</i> Применение дифференциальных связей Бэклунда для построения точных решений нелинейных гиперболических уравнений .....	54
<i>Бойков И. В., Рязанцев В. А.</i> Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений .....	68
<i>Казакова Т. Г., Саттарова Р. Р.</i> Новый пример конечномерной редукции дискретной цепочки типа цепочки Тоды .....	85
<i>Ройтенберг В. Ш.</i> О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией .....	98
<i>Ланич А. О., Смолькин Е. Ю., Шутков А. С., Снегур М. О.</i> Численный метод решения задачи о распространении вытекающих ТЕ-поляризованных волн в многослойном волноводе кругового сечения ....	114
<i>Бойков И. В., Айкашев П. В.</i> Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн .....	127

**UNIVERSITY PROCEEDINGS**  
**VOLGA REGION**  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 3 (55)

2020

**CONTENT**

**MATHEMATICS**

---

<i>Tsupak A. A.</i> Analysis of the diffraction efficiency of one-dimensional binary diffraction grating by the plane wave expansion method (The TE-polarization case) ...	3
<i>Ivanovskiy L. I.</i> Dynamics of one system of diffusionally coupled differential equations with auxiliary internal connection.....	15
<i>Gusarova E. V., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.</i> On a method for solving the problem of electromagnetic wave diffraction on a diffraction grating .....	31
<i>Red'kina T. V., Novikova O. V.</i> Backlund transformations for Liouville's equations with exponential nonlinearity.....	39
<i>Red'kina T. V., Novikova O. V.</i> Application of backlund differential constraint for constructing exact solutions of nonlinear hyperbolic equations.....	54
<i>Boykov I. V., Ryazantsev V. A.</i> Numerical recovery of the initial condition in the cauchy problems for linear parabolic and hyperbolic equations .....	68
<i>Kazakova T. G., Sattarova R. R.</i> A new example of finite-dimensional reduction of a discrete chain of the Toda chain type .....	85
<i>Roytenberg V. Sh.</i> On bifurcations of a periodic trajectory "eight" of a pieewise smooth vector field with symmetry.....	98
<i>Lapich A. O., Smol'kin E. Yu., Shutkov A. S., Snegur M. O.</i> A numerical method for solving the problem of propagation of outleting TE-polarized waves in a multilayer circular waveguide.....	114
<i>Boykov I. V., Aykashev P. V.</i> Application of the continuous operator method to the solution of the Pocklington and Gallen equations for thin wire antennas ...	127

## АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ МЕТОДОМ ПЛОСКИХ ВОЛН (СЛУЧАЙ ТЕ-ПОЛЯРИЗАЦИИ)<sup>1</sup>

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Цель работы – исследование дифракции электромагнитной ТЕ-волны на одномерной цилиндрической дифракционной решетке.

*Материалы и методы.* Задача рассматривается в полной электродинамической постановке, для ее решения применяется метод плоских волн; для численного решения вспомогательной полной проблемы собственных значений применяется метод вращений Якоби.

*Результаты.* Метод плоских волн программно реализован, проведены вычислительные эксперименты, подтвердившие сходимость и устойчивость метода.

*Выводы.* Результаты вычислительных экспериментов согласуются как с известными теоретическими результатами исследования задачи, так и опубликованными в работах других авторов результатами численного анализа. Описанный численный метод является эффективным и может применяться для решения задач моделирования одномерно-периодических решеток с заданными характеристиками.

**Ключевые слова:** дифракционные решетки, метод плоских волн, электромагнитные ТЕ-волны, дифракционная эффективность.

*А. А. Tsupak*

## ANALYSIS OF THE DIFFRACTION EFFICIENCY OF ONE-DIMENSIONAL BINARY DIFFRACTION GRATING BY THE PLANE WAVE EXPANSION METHOD (THE TE-POLARIZATION CASE)

### **Abstract.**

*Background.* The aim of this work is to study the diffraction of an electromagnetic TE-wave by one-dimensional cylindrical diffraction gratings.

*Material and methods.* The problem is considered in rigorous electromagnetic formulation, for its solving the method of plane waves expansion is used; the Jacobi rotation method is used for the numerical solving of the auxiliary eigenvalue problem.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00219А.

© Цупак А. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

*Results.* The plane wave method has been implemented in software; computational experiments have been carried out, which have confirmed the convergence and stability of the method.

*Conclusions.* The results of computational experiments are consistent with both theoretical and numerical results previously published by other authors. The described numerical method can be efficiently used to solve problems of modeling one-dimensional periodic gratings with specified characteristics.

**Keywords:** diffraction gratings, plane wave expansion method, electromagnetic TE-waves, diffraction efficiency.

### Введение

Рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной монохроматической ТЕ-волны на бесконечной одномерно-периодической диэлектрической решетке с одним штрихом на периоде.

Образующие цилиндрической поверхности решетки параллельны оси  $Oy$  декартовой системы координат  $Oxyz$ . На рис. 1 изображено сечение решетки в плоскости  $Oxz$ .

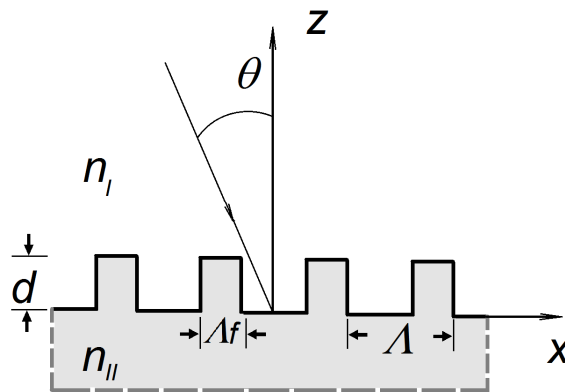


Рис. 1. Одномерно-периодическая диэлектрическая дифракционная решетка

В качестве падающей на решетку волны рассматривается плоская ТЕ-волна единичной амплитуды; вектор распространения волны имеет вид  $\mathbf{k} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ .

Для исследования задачи удобно представить неограниченное трехмерное пространство объединением трех подобластей, две из которых –  $D_I := \{(x, y, z) : z > d\}$  и  $D_{II} := \{(x, y, z) : z < 0\}$  – являются однородными и изотропными, а третья –  $D_{III}$  – характеризуется кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью.

Согласно методу плоских волн [1–4] полное поле в областях  $D_I$  и  $D_{II}$  представляется рядами плоских волн. В слое  $D_{III} := \{(x, y, z) : 0 < z < d\}$  выписываются ряды для касательных компонент электромагнитного поля.

Из системы уравнений Максвелла, а также из условий сопряжения на поверхности решетки вытекают уравнения, связывающие неизвестные коэффициенты в разложениях по плоским волнам.

Отыскание этих коэффициентов не только позволяет определить вид электромагнитного поля (как отраженного решеткой, так и прошедшего через нее), но и дает возможность определить важнейшие характеристики решетки – ее дифракционную эффективность в основных дифракционных порядках. Знание этих характеристик необходимо для расчета и оптимизации оптических элементов на основе дифракционных решеток [5].

### 1. Постановка задачи

Пусть свободное от рассеивателя пространство характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей  $\epsilon_0 > 0$  и  $\mu_0 > 0$ . Рассмотрим неограниченную цилиндрическую периодическую решетку (геометрия задачи представлена на рис. 1).

Область, расположенная ниже поверхности решетки, является однородной и характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(x) > 0$ . Период решетки обозначен через  $\Lambda$ , ширина гребня решетки составляет  $\Lambda f$ ,  $f \in (0; 1)$ , а его высота –  $d > 0$ .

На решетку падает плоская монохроматическая электромагнитная волна  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ , которая определяется второй компонентой электрического поля  $E_0^2$ :

$$E_0^2 = \exp(-ik_0 n_1 (x \sin \theta - (z - d) \cos \theta)). \quad (1)$$

Здесь  $k_0 = 2\pi / \lambda_0$  – волновое число свободного пространства;  $n_1$  – индекс преломления свободного пространства (индекс преломления в точках решетки обозначается через  $n_{II}$ ).

Требуется найти полное электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , удовлетворяющее всюду вне поверхности решетки системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega \epsilon_0 \epsilon(x) \mathbf{E}, \end{aligned}$$

условию квазипериодичности Флоке [2]:

$$\mathbf{E}(x + \Lambda) = \mathbf{E}(x) e^{-ik_0 n_1 \sin \theta \Lambda},$$

условию непрерывности касательных компонент

$$[\mathbf{E}]_{\tau} = [\mathbf{H}]_{\tau} = 0$$

на поверхности решетки (за исключением точек ребер), условию излучения на бесконечности, состоящему в том, что в рассеянном поле отсутствуют волны, приходящие из бесконечности [1], а также определить значения дифракционной эффективности основных дифракционных порядков [3, 4].

### 2. Метод плоских волн в задаче рассеяния плоской ТЕ-волны

Согласно методу плоских волн [3] представим отличную от нуля компоненту  $E^2$  полного электрического поля в областях  $D_I$  и  $D_{II}$  в виде

$$E_I^2 = E_0^2 + \sum_j R_j e^{-i(k_{jx}x + k_{I,zj}(z-d))}, \quad z > d; \quad (2)$$

$$E_{II}^2 = \sum_j T_j e^{-i(k_{jx}x - k_{II,zj}z)}, \quad z < 0. \quad (3)$$

Здесь и всюду ниже символом  $\sum_j$  обозначены суммы по всем целым  $j$ .

Коэффициенты  $R_j$  и  $T_j$  в разложении отраженной и прошедшей волн подлежат определению. Величины  $k_{xj}$ ,  $k_{I,zj}$  и  $k_{II,zj}$  определяются соотношениями:

$$k_{xj} = k_0(n_l \sin \theta - j\lambda_0 / \Lambda), \quad (4)$$

$$k_{l,zj} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_l^2 - k_{xj}^2}, & k_0 n_l > |k_{xj}|, \\ -i\sqrt{k_{xj}^2 - k_0^2 n_l^2}, & k_0 n_l < |k_{xj}|, \end{cases} \quad l = I, II. \quad (5)$$

Магнитное поле в областях  $D_I$  и  $D_{II}$  определяется согласно уравнению

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}. \quad (6)$$

Далее, переходя к рассмотрению области  $D_{III} := \{(x, y, z) : 0 < z < d\}$ , представим касательные компоненты электромагнитного поля  $\mathbf{E}_g, \mathbf{H}_g$  рядами Фурье с неизвестными коэффициентами, зависящими от пространственной переменной  $z$ :

$$E_g^2 = \sum_j S_j(z) e^{-ik_{xj}x}, \quad (7)$$

$$H_g^1 = -i\sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \sum_j U_j(z) e^{-ik_{xj}x}. \quad (8)$$

Система уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0 \epsilon(x) \mathbf{E}$$

приведется к виду

$$\frac{\partial E_g^2}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_g^1, \quad \frac{\partial E_g^2}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_g^3, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_g^1}{\partial z} = i\omega\epsilon_0 \epsilon(x) E_g^2 + \frac{\partial H_g^3}{\partial x}. \quad (10)$$

В области  $D_{III}$  для кусочно-постоянной функции  $\epsilon(x)$  рассмотрим разложение в ряд Фурье

$$\epsilon(x) = \sum_j \epsilon_j e^{i2\pi j/\Lambda x} \tag{11}$$

с коэффициентами (учтем, что квадрат показателя преломления  $n_l$  равен относительной диэлектрической проницаемости в области  $D_l$ ):

$$\epsilon_j = \begin{cases} n_{II}^2 f + n_I^2 (1 - f), & j = 0, \\ \left( n_I^2 - n_{II}^2 \right) \frac{i(1 - e^{-2\pi i j f})}{2\pi j}, & j \neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя (7) и (8) в (9), (10), исключая компоненту  $H^3$ , получим

$$-i\sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \sum_j U'_j(z) e^{-ik_{xj}x} = i\omega\epsilon_0\epsilon(x) \sum_p S_p(z) e^{-ik_{xp}x} - \frac{i}{\omega\mu_0} \sum_j S_j(z) k_{xj}^2 e^{-ik_{xj}x},$$

$$\sum_j U'_j(z) e^{-ik_{xj}x} = \frac{1}{k_0} \sum_j S_j(z) k_{xj}^2 e^{-ik_{xj}x} - k_0\epsilon(x) \sum_p S_p(z) e^{-ik_{xp}x}.$$

Преобразуем последнюю сумму с учетом (11):

$$\begin{aligned} \sum_p S_p(z) \epsilon(x) e^{-ik_{xp}x} &= \sum_p S_p(z) \sum_q \epsilon_q e^{i2\pi \frac{q}{\Lambda} x} e^{-i(k_0 n_I \sin \theta - 2\pi \frac{p}{\Lambda})x} = \\ &= \sum_{p,p} S_p(z) \epsilon_q e^{-i(k_0 n_I \sin \theta - 2\pi \frac{p+q}{\Lambda})x} = \{j = p + q\} = \\ &= \sum_p S_p(z) \sum_j \epsilon_{j-p} e^{-i(k_0 n_I \sin \theta - 2\pi \frac{j}{\Lambda})x} = \sum_j \left( \sum_p S_p(z) \epsilon_{j-p} \right) e^{-ik_{xj}x}. \end{aligned}$$

Окончательно получим систему уравнений

$$\frac{\partial S_j}{\partial z} = k_0 U_j, \quad \frac{\partial U_j}{\partial z} = \frac{k_{xi}^2}{k_0} S_j - k_0 \sum_p \epsilon_{j-p} S_p. \tag{13}$$

Далее будем рассматривать конечные разложения в суммах вида (7), (8) или (13), считая, что индексы суммирования ( $j, m$ ) изменяются в пределах от  $n_1 \in \mathbb{Z}$  до  $n_2 \in \mathbb{Z}$  ( $n_1 < n_2$ ).

Вводя новую переменную  $z' = k_0 z$  и исключая из (13) функции  $U_j$ , получим систему  $n = n_2 - n_1 + 1$  дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z'^2} = \mathbf{A} \mathbf{S}. \tag{14}$$

Здесь  $\mathbf{S} = (S_{n_1}, \dots, S_{n_2})^T$  – искомое решение, а  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица порядка  $n$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$A_{jm} = \delta_{jm} \left( \frac{k_{xj}}{k_0} \right)^2 - \varepsilon_{j-m}, \quad (15)$$

$\delta_{jm}$  – символ Кронекера.

**Замечание 1.** Матрица  $\mathbf{A}$  является симметрической. Для решения полной проблемы ее собственных значений применим метод вращений (Якоби) [6, 7].

Пусть  $q_n^2$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{Q}$  – диагональная матрица с элементами  $q_n$  ( $\text{Re}(q_n) \geq 0$ ,  $\text{Im}(q_n) \geq 0$ ) на диагонали,  $\mathbf{W}$  – матрица собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{V} := \mathbf{WQ}$ . Тогда решение системы (14) можно записать в виде

$$\mathbf{S}(z') = \mathbf{W}e^{\mathbf{Q}(z'-d)}\mathbf{c}^+ + \mathbf{W}e^{-\mathbf{Q}z'}\mathbf{c}^-. \quad (16)$$

Выполняя подстановку  $z' = k_0z$ , выпишем развернутые представления решений  $S_j$  и  $U_j$

$$S_j(z) = \sum_{m=n_1}^{n_2} W_{jm} \left\{ c_m^+ e^{k_0 q_m(z-d)} + c_m^- e^{-k_0 q_m z} \right\}, \quad (17)$$

$$U_j(z) = \sum_{m=n_1}^{n_2} V_{jm} \left\{ c_m^+ e^{k_0 q_m(z-d)} - c_m^- e^{-k_0 q_m z} \right\}. \quad (18)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $c_j^+$  и  $c_j^-$  используем условия сопряжения на границе раздела сред (т.е. на поверхности решетки).

Проведем сначала вычисления для касательных компонент электрического поля. При  $z = d$  имеем

$$E_g^2|_{z=d} = E_1^2|_{z=d}, \quad (19)$$

откуда получим с учетом представлений (1), (2) и (7):

$$\sum_j S_j(d) e^{-ik_{xj}x} = e^{-ik_0 n_1 x \sin \theta} + \sum_j R_j e^{-ik_{xj}x}. \quad (20)$$

Приравнявая коэффициенты при функциях  $e^{-ik_{xj}x}$ , получим с учетом равенства  $k_{x0} = k_0 n_1 \sin \theta$  следующую систему:

$$\sum_{m=n_1}^{n_2} W_{jm} \left\{ c_m^+ + c_m^- e^{-k_0 q_m d} \right\} = \delta_{j0} + R_j. \quad (21)$$



Аналогично, из условия

$$E_g^2|_{z=0} = E_{II}^2|_{z=0} \quad (22)$$

последовательно выведем

$$\sum_j S_j(0) e^{-ik_{xj}x} = \sum_j T_j e^{-ik_{xj}x}, \quad (23)$$

$$\sum_{m=n_1}^{n_2} W_{jm} \{c_m^+ e^{-k_0 q_m d} + c_m^-\} = T_j. \quad (24)$$

Запишем теперь равенство касательных компонент магнитного поля при  $z = d$  с учетом уравнений Максвелла:

$$H_I^1|_{z=d} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_I^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = H_g^1|_{z=d}, \quad (25)$$

откуда получим с учетом представлений (2), (8):

$$\begin{aligned} & -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_j U_j(d) e^{-ik_{xj}x} = \\ & = -i \frac{1}{\omega\mu_0} \left\{ e^{-ik_0 n_I x \sin \theta} i k_0 n_I \cos \theta + \sum_j R_j e^{-ik_{xj}x} (-ik_{1,zj}) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Приравнивая коэффициенты при  $e^{-ik_{xj}x}$ , получим

$$\sum_{m=n_1}^{n_2} V_{jm} \{c_m^+ - c_m^- e^{-k_0 q_m d}\} = i \left\{ \delta_{j0} n_I \cos \theta - \frac{k_{1,zj}}{k_0} R_j \right\}. \quad (27)$$

Аналогично, из условия

$$H_{II}^1|_{z=0} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_{II}^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = H_g^1|_{z=0} \quad (28)$$

получим последовательно с учетом представлений (3) и (9):

$$-i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_j U_j(0) e^{-ik_{xj}x} = -i \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_j T_j e^{-ik_{xj}x} (ik_{II,zj}), \quad (29)$$

$$\sum_{m=n_1}^{n_2} V_{jm} \{c_m^+ e^{-k_0 q_m d} - c_m^-\} = i \frac{k_{II,zj}}{k_0} T_j. \quad (30)$$

Таким образом, для отыскания коэффициентов  $c_j^+$ ,  $c_j^-$ ,  $R_j$  и  $T_j$  получена система  $4n$  линейных алгебраических уравнений (21), (24), (27) и (30), которую запишем в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{WX} & -\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{VX} & i\mathbf{K}_I & \mathbf{O} \\ \mathbf{WX} & \mathbf{W} & \mathbf{O} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{VX} & -\mathbf{V} & \mathbf{O} & -i\mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{j0} \\ in_1 \cos \theta \cdot \delta_{j0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{O}$  – единичная и нулевая матрицы, а  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{K}_I$  и  $\mathbf{K}_{II}$  – диагональные матрицы с элементами

$$e^{-k_0 q_m d}, \frac{k_{I,zj}}{k_0} \text{ и } \frac{k_{II,zj}}{k_0}$$

соответственно. Исключая неизвестные  $R_j$  и  $T_j$  из (31), получим систему линейных уравнений порядка  $2n$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} + i\mathbf{K}_I \mathbf{W} & -\mathbf{VX} + i\mathbf{K}_I \mathbf{WX} \\ \mathbf{VX} - i\mathbf{K}_{II} \mathbf{WX} & -\mathbf{V} - i\mathbf{K}_{II} \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\delta_{j0}(n_I \cos \theta + (\mathbf{K}_I)_{j0}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Решая (32), найдем коэффициенты  $c_j^+$ ,  $c_j^-$ , а затем вычислим  $R_j$  и  $T_j$  по формулам (21) и (24) соответственно.

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

С целью верификации вычислительного алгоритма была рассмотрена задача рассеяния плоской ТЕ-волны, описанная в статье [3].

Рассмотрим волну частотой 500 ТГц ( $\lambda_0 = 599,5$  нм). Фиксируем следующие параметры среды и решетки:

$$n_I = n_{gr} = 1, n_{II} = n_{rd} = 2,04, \Lambda = 10\lambda_0, d = 0,5\lambda_0, f = 0,5, \theta = \pi/18.$$

Дифракционные эффективности  $j$ -го порядка определяются по формулам

$$DEr_j = |R_j|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_{I,zj}}{k_0 n_I \cos \theta} \right),$$

$$DEt_j = |T_j|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_{II,zj}}{k_0 n_I \cos \theta} \right).$$

На рис. 2,б приведен график значений коэффициента  $DE_1 = DEr_1 + DEt_1$  в зависимости от числа  $n$  в разложениях (17), (18) (во всех расчетах принято  $n_1 < 0$  и  $n_1 = -n_2$ ). Приведенные результаты совпадают с приведенными в работе [3] (см. рис. 2,а) и подтверждают стабильное вычисление параметров дифракционной эффективности.

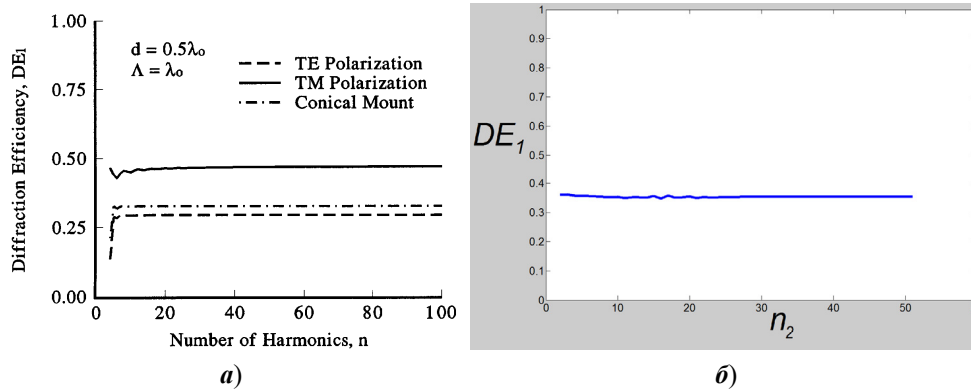


Рис. 2. Дифракционная эффективность решетки на первом дифракционном порядке ( $n = 2n_2 + 1$ )

Еще одним критерием эффективности устойчивости описанного алгоритма является выполнение закона сохранения энергии, который в случае непроводящих диэлектрических сред приводит к равенству (см. [3, с. 1075]):

$$DE := \sum_j (DEr_j + DEt_j) = 1,$$

которое должно выполняться с достаточно высокой точностью (допустимой считается погрешность  $10^{-10}$ ).

На рис. 3 приведен график зависимости погрешности  $|1 - DE|$  расчета коэффициента  $DE$  от числа слагаемых  $n$  в разложениях (17), (18). Описанное выше требование выполняется при  $n \leq 150$ . Как показывают вычисления, в выборе столь большого числа членов ряда Фурье нет никакой необходимости.

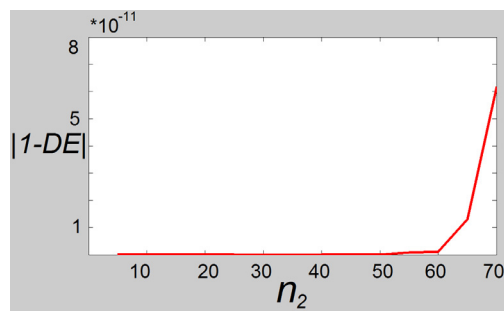


Рис. 3. Точность вычисления коэффициента  $DE$

На рис. 4 приведены графики компоненты  $E_1^2$  отраженного электрического поля в области  $x \in (0; \Lambda)$ ,  $z \in (2d; 3d)$  при некоторых значениях  $n_2$  (общее число членов ряда составляет  $2n_2 + 1$ ). Качественное поведение решения описывается достаточно точно уже при  $n = 11$ , при этом количественные характеристики решений при  $n > 20$  мало отличаются (см. подписи к шкалам на рисунках).

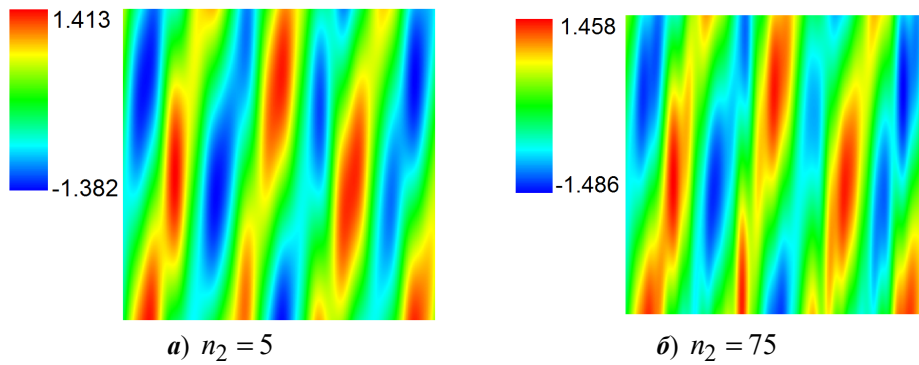


Рис. 4. Вещественная часть рассеянного электрического поля на периоде Флоке при различном числе членов в разложении по плоским волнам

При конструировании оптических покрытий с дифракционными решетками важно знать, как зависит дифракционная эффективность решетки от одного или нескольких параметров (см., например, [8]).

На рис. 5 графически представлена зависимость  $DE_{r1}$  от ширины и высоты порошка решетки. В двух рассмотренных случаях (значение коэффициента  $n_{rd} = 1,48$  соответствует стеклу,  $n_{rd} = 2,4$  – алмазу) наибольшая отражательная эффективность достигается при ширине порошка, близкой к половине длины волны, при этом эффективность значительно выше для алмазной решетки.

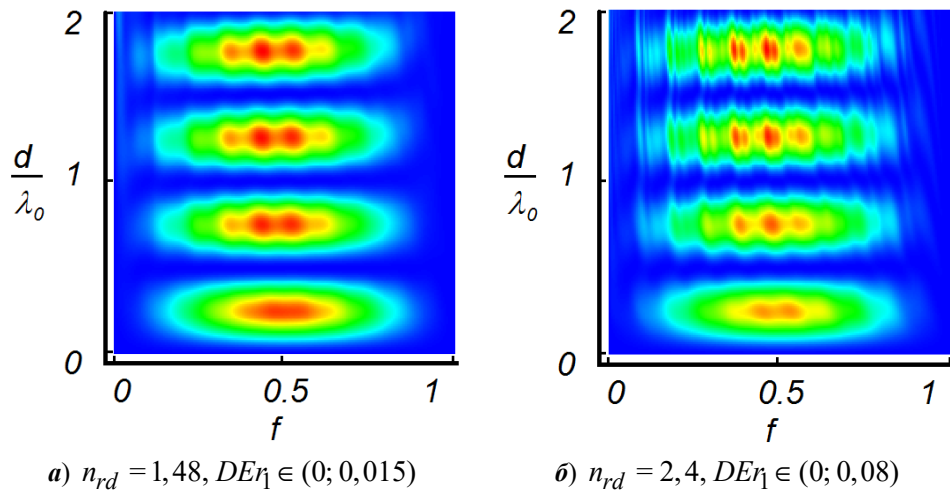


Рис. 5. Зависимость коэффициента  $DE_{r1}$  от ширины и высоты порошка решетки;  $n_1 = n_{gr} = 1$ ,  $\Lambda = 10\lambda_0$ ,  $\theta = \pi/18$

На рис. 6 представлена зависимость  $DE_{r1}$  от коэффициента преломления  $n_{rd} \in (1,48; 2,28)$ , отвечающего различным видам стекла, и угла  $\theta$  падения волны  $\mathbf{E}_0$ . На рис. 5, 6 минимуму значений  $DE_{r1}$  соответствует синий цвет, максимуму – красный.

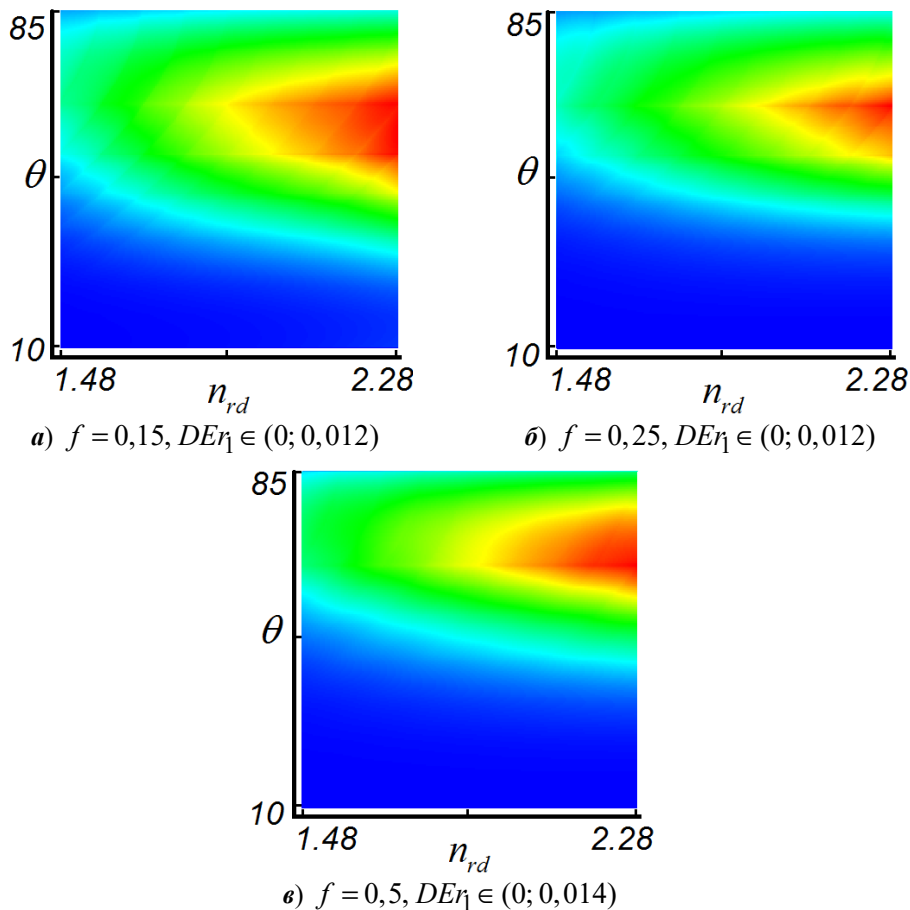


Рис. 6. Зависимость коэффициента  $DEr_1$  от коэффициента преломления решетки и угла падения волны (в градусах);  $n_1 = n_{gr} = 1, \Lambda = 10\lambda_0$

### Заключение

В работе описано применение метода плоских волн для расчета дифракционной эффективности одномерной цилиндрической диэлектрической решетки в случае падения на нее плоской ТЕ-волны. Предложена и верифицирована эффективная программная реализация метода, исследованы его сходимость и устойчивость, проведено сравнение результатов расчетов с ранее опубликованными.

### Библиографический список

1. Шестопалов, В. П. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопалов, А. А Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1986. – 232 с.
2. Шестопалов, В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1989. – 216 с.
3. Moharam, M. G. Pommet Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings / M. G. Moharam, Eric B. Grann, and Drew A. Pommet // J. Opt. Soc. Am. A. – 1995. – Vol. 12, № 5. – P. 1068–1077.

4. **Роров, Е.** Gratings : Theory and Numeric Applications / Е. Popov. – Second Revisited Edition. – Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. – 59 p.
5. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н. С. Бахвалов. – Москва : Наука, 1973. – 632 с.
6. **Вержбицкий, В. М.** Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – Москва : Высшая школа, 2002. – 840 с.
7. Design of broadband polarization-independent multilayer dielectric grating / Chen Junming et al. // Proc. of SPIE. – 2017. – Vol. 10339. – P. 1033–911.
8. Optical characterizations and thermal analyses of HfO<sub>2</sub>/SiO<sub>2</sub> multilayered diffraction gratings for high-power continuous wave laser / Inki Kim et al. // J. Phys. Photonics. – 2020. – Vol. 2. – P. 025–004.

#### **References**

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko Yu. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. T. 1. Difraktsionnye reshetki* [Resonant scattering of waves. Volume 1. Diffraction gratings]. Kiev: Naukova dumka, 1986, 232 p. [In Russian]
2. Shestopalov V. P., Sirenko Yu. K. *Dinamicheskaya teoriya reshetok* [Dynamic lattice theory]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p. [In Russian]
3. Moharam M. G., Grann Eric B., Pommet Drew A. *J. Opt. Soc. Am. A.* 1995, vol. 12, no. 5, pp. 1068–1077.
4. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications*. Second Revisited Edition. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014, 59 p.
5. Bakhvalov N. S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical methods (analysis, algebra, ordinary differential equations)]. Moscow: Nauka, 1973, 632 p. [In Russian]
6. Verzhbitskiy V. M. *Osnovy chislennykh metodov* [Numerical basics]. Moscow: Vysshaya shkola, 2002, 840 p. [In Russian]
7. Junming Chen et al. *Proc. of SPIE*. 2017, vol. 10339, pp. 1033–911.
8. Kim Inki et al. *J. Phys. Photonics*. 2020, vol. 2, pp. 025–004.

---

#### **Цупак Алексей Александрович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

#### **Tsupak Aleksey Aleksandrovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-  
department of mathematics and supercom-  
puter modeling, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

---

#### **Образец цитирования:**

Цупак, А. А. Анализ дифракционной эффективности одномерно-периодической дифракционной решетки методом плоских волн (случай ТЕ-поляризации) / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 3–14. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-1.

## ДИНАМИКА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФУЗИОННО СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Работа посвящена динамике системы дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью. Актуальность исследований такой системы обусловлена тем, что незначительное изменение коэффициента дополнительной связи позволяет получить сложные сценарии поведения устойчивых состояний равновесия. Для рассматриваемой системы были найдены критические зависимости, при которых нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость с появлением двух пространственно неоднородных состояний в одном случае и цикла в другом. При значениях параметров, близких к критическим, были получены асимптотические формулы для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.

*Материалы и методы.* Для задачи в комплексе применялись аналитические и численные методы решения. При численном исследовании особое внимание уделялось значениям параметров, при которых нулевое решение системы дифференциальных уравнений теряет свою устойчивость.

*Результаты.* Были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят бифуркации нулевого состояния равновесия. При значениях параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления неоднородных состояний равновесия в одном случае и цикла – в другом.

*Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов. Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие системы дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, кубическая нелинейность, нулевое состояние равновесия, потеря устойчивости.

L. I. Ivanovskiy

## DYNAMICS OF ONE SYSTEM OF DIFFUSIONALLY COUPLED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AUXILIARY INTERNAL CONNECTION

### Abstract.

*Background.* The work is devoted to the dynamics of a system of differential equations with diffusion interaction and additional internal constraint with cubic nonlinearity. The relevance of studies of such a system is due to the fact that a slight

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-29-10055).

© Ивановский Л. И., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

change in the additional coupling coefficient allows one to obtain complex scenarios of the behavior of stable equilibrium states. For the system under consideration, critical dependences were found at which the zero equilibrium state loses its stability with the appearance of two spatially inhomogeneous states in one case and a cycle in the other. For the values of the parameters close to the critical ones, asymptotic formulas were obtained for the modes branching from the zero solution.

*Materials and methods.* For the problem in the complex, analytical and numerical solution methods were used. In the numerical study, special attention was paid to the values of the parameters at which the zero solution of the system of differential equations loses its stability.

*Results.* Critical dependences of the parameters at which bifurcations of the zero equilibrium state occur. At the values of the parameters close to critical, a normal form was constructed and on its basis the conditions for the appearance of inhomogeneous equilibrium states in one case and a cycle in the other were determined.

*Conclusions.* The results obtained can be used to solve problems of numerical modeling of some biophysical processes. It is also interesting to extend these results to other systems of differential equations with additional internal connection.

**Keywords:** system of differential equations, cubic nonlinearity, zero equilibrium, loss of stability.

### Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

которую дополним следующими нелинейными условиями на границах:

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k + \frac{\beta}{N} u_k^3, \quad 1 \leq k < N, \quad (2)$$

дающими дополнительную внутреннюю связь с кубической нелинейностью. Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см., например, [1–4]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренним элементом цепочки. Для системы (1), (2)  $u_j = u_j(t)$  – гладкие функции при  $t \geq 0$ , параметры  $\alpha$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma$  – действительные числа, а индекс  $k \in N$  определяет дополнительную внутреннюю связь между элементами  $u_N$  и  $u_k$ . На рис. 1 дана иллюстрация взаимодействия функций  $u_j$ .



Рис 1. Взаимодействия функций  $u_j$  в системе (1), (2)

Система (1), (2) очевидным образом имеет однородное нулевое решение  $u_j(t) \equiv 0$ . Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения и



режимов, ответвляющихся от него при критических значениях параметров. Можно выделить два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1), (2). В первом случае через мнимую ось переходит нулевое собственное число, а во втором – пара комплексно сопряженных собственных чисел. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров и асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

### 1. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (1), (2):

$$\dot{u}_j = N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (4)$$

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним замену

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j, \quad (5)$$

где  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$ ,  $\lambda$  – собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент  $\delta$  определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (3) с условиями (4). При подстановке замены (5) можно получить формулы для коэффициента  $\delta$  и параметра  $\alpha$ :

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}, \quad (6)$$

где  $x_k = \frac{1}{N} \left( k - \frac{1}{2} \right)$ .

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим, при каких критических значениях параметра  $\alpha$  собственные значения выходят на мнимую ось. Рассмотрим случаи нулевого и чисто мнимого значения  $\lambda$ . Подстановка  $\lambda = 0$  в выражение (6) приводит к зависимости

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \quad (7)$$

где  $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$ .

Подстановка  $\lambda = i\omega$ , где  $\omega \in \mathbb{R}$ , позволяет перейти от выражения (6) при фиксированном  $\gamma$  и  $x_k = \frac{1}{N} \left( k - \frac{1}{2} \right)$  к уравнению относительно  $\alpha_c$  и  $\omega$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_k}, \quad (8)$$

где  $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$ . Выделяя вещественную и мнимую части в выражении (8) и численно решая полученную систему, находим значения  $\omega$  и  $\alpha_c$  такие, чтобы  $\alpha_c$  было минимальным по модулю.

Согласно ранее полученным формулам справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (1), (2) нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанных формулами (7) или (8).

Для системы (3), (4) изучим динамику поведения критических зависимостей  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$  для различных значений  $k$ , где  $k$  – номер узла, с которым дополнительно связано последнее уравнение. В нашем случае количество уравнений считалось  $N = 50$ . Отметим, что увеличение  $N$  слабо сказывается на поведении функций  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ .

На рис. 2 приведена схематическая визуализация критических зависимостей  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ , рассчитываемых по формулам (7) и (8) соответственно, для значений индекса  $k = 1$  и  $k = 26$ . Здесь кривая  $\alpha_u$  показана синим цветом, а кривая  $\alpha_c$  – красным цветом. Как показано на рис. 2, кривые  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$  пересекаются в точке  $B$  с координатами  $(\gamma_*, \alpha_*)$ , где  $\gamma_* > 0$  и  $\alpha_* < 0$ . Отметим, что с увеличением индекса  $k$  значение  $\alpha_*$  будет уменьшаться, а  $\gamma_*$  – увеличиваться.

Как показано на рис. 3, для некоторых значений индекса  $k$  появляется дополнительная критическая зависимость  $\alpha_f(\gamma)$ , рассчитываемая по формуле (8). Кривая  $\alpha_f$  показана зеленым цветом. Она берет свое начало в точке  $F$  локального минимума функции  $\alpha_u(\gamma)$  с координатами  $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$  и сливается с кривой  $\alpha_c$  в точке  $B$  с координатами  $(\gamma_*, \alpha_*)$ , где  $0 < \bar{\gamma} < \gamma_*$ , а  $0 < \bar{\alpha} < \alpha_*$ . Отметим, что с увеличением индекса  $k$  значение  $\bar{\alpha}$  будет уменьшаться, а  $\bar{\gamma}$  – увеличиваться.

Кривые  $\alpha_u$ ,  $\alpha_c$  и  $\alpha_f$  являются важнейшими элементами построения областей параметров  $(\gamma, \alpha)$ , определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия. Так, область  $S$  соответствует случаю устойчивого нулевого решения,  $U$  – случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в области  $C$  наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

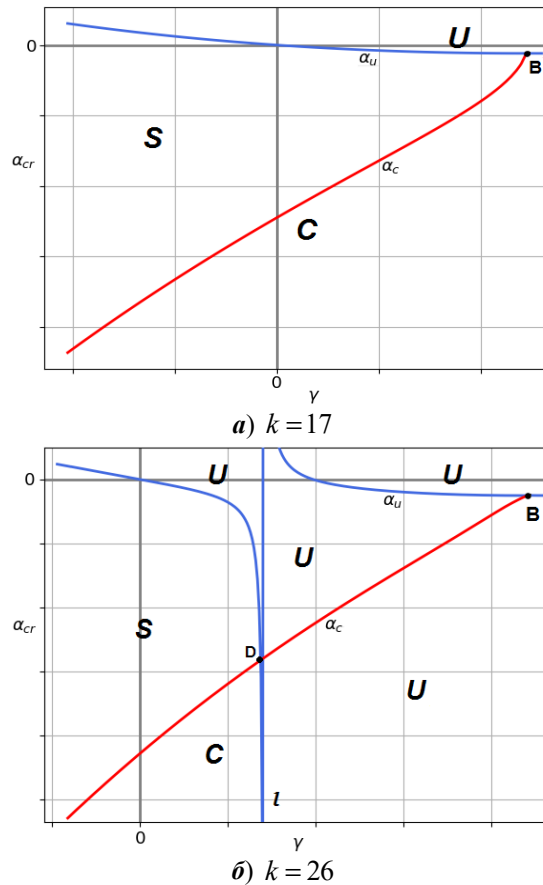


Рис. 2. Схематическая визуализация кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$

Кривая  $\alpha_u$  определяет верхнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $U$ , для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_u$ . Здесь  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_u = \begin{cases} \gamma^*, & 1 \leq k \leq 17, \\ \bar{\gamma}, & 18 \leq k \leq 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50. \end{cases} \quad (9)$$

Величина  $\hat{\gamma}$  является абсциссой точки  $D$  пересечения кривых  $\alpha_c$  и  $\alpha_u$ ,  $0 < \hat{\gamma} < l$ , где  $l > 0$  – абсцисса точек вертикальной асимптоты  $\gamma=l$  для функции  $\alpha_u(\gamma)$  (рис. 2,б, 3,з). Для некоторых значений индекса  $k$  верхнюю границу области  $S$  определяет также и кривая  $\alpha_f$ , для всех  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ . Здесь  $\Gamma_f$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_f = \begin{cases} \gamma^*, & 18 \leq k \leq 24, \\ \gamma_1, & k = 25, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\gamma_1$  – абсцисса точки  $P_1$  пересечения кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_f$  такая, что  $l < \gamma_1 < \gamma^*$  (рис. 3,б).

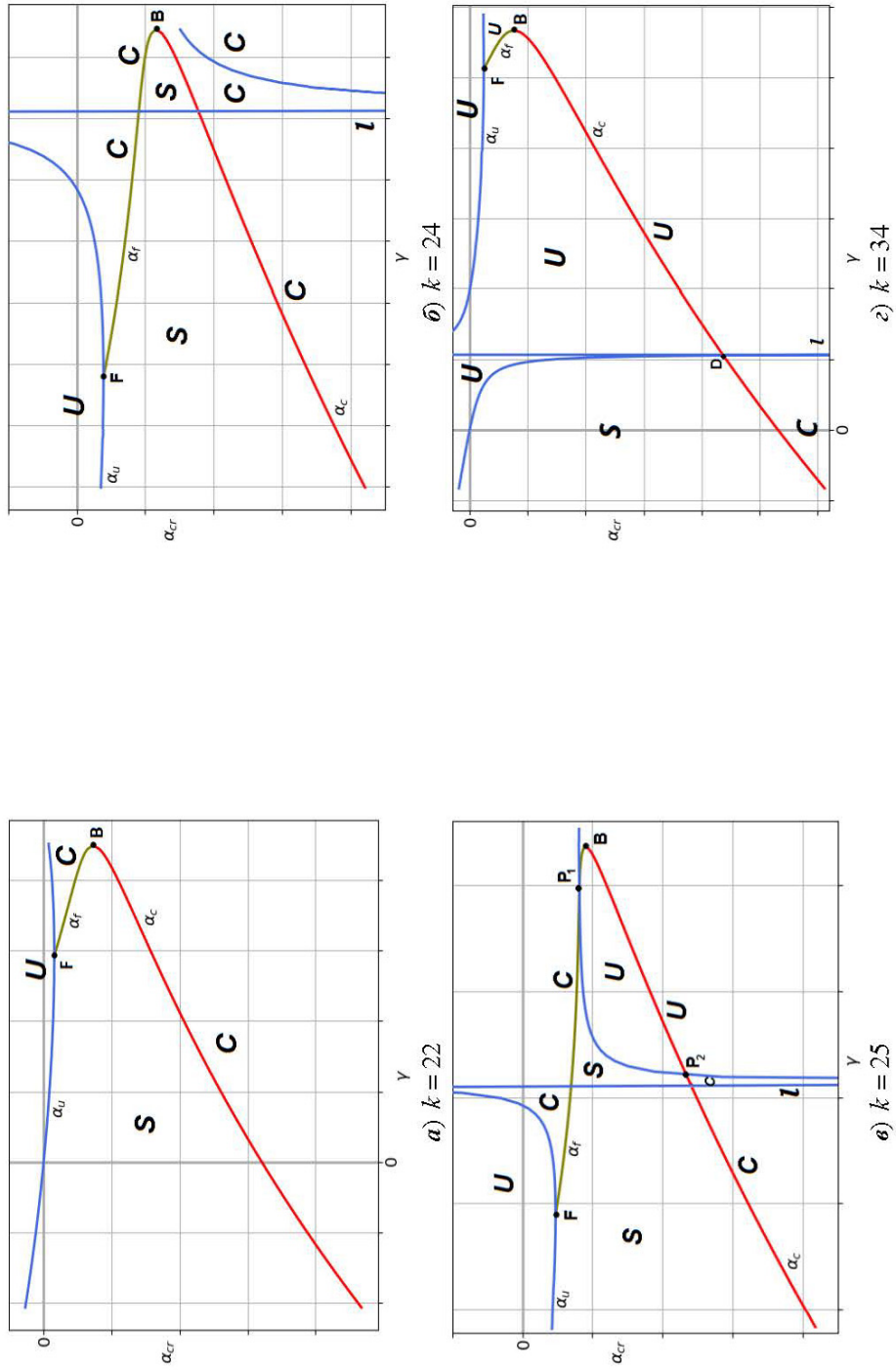


Рис. 3. Схематическая визуализация кривых  $\alpha_u$ ,  $\alpha_f$  и  $\alpha_c$

Для случая  $k = 25$  кривая  $\alpha_u$  определяет также и нижнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $U$ , для всех значений  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_2$  – абсцисса точки  $P_2$  пересечения кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$  такая, что  $l < \gamma_2 < \gamma^*$  (см. рис. 3, в). Отметим, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения

$$\frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_{25}} - \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_{25}} = 0, \quad (11)$$

удовлетворяющими условию вида

$$\gamma^* > \gamma_1 > \gamma_2 > l. \quad (12)$$

Кривая  $\alpha_c$  определяет нижнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $C$ , для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_c$ . Здесь  $\Gamma_c$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_c = \begin{cases} \gamma^*, & 1 \leq k \leq 24, \\ \gamma_2, & k = 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50. \end{cases} \quad (13)$$

Исходя из описанных результатов, можно сформулировать две леммы.

**Лемма 2.** Для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  определяется выражением (9) и  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), критическая зависимость  $\alpha_u(\gamma)$ , рассчитываемая по формуле (7), позволяет выделить область параметров  $(\gamma, \alpha)$  с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

**Лемма 3.** Для всех значений  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  определяется выражением (10), и  $\gamma \leq \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  определяется выражением (13), критические зависимости  $\alpha_f(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ , рассчитываемые по формуле (8), позволяют выделить область параметров  $(\gamma, \alpha)$  с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Леммы доказываются на основе приведенного выше численного анализа линеаризованной в нуле системы (1), (2).

## 2. Локальный анализ поведения системы в окрестности нулевого состояния равновесия

Методами малых возмущений [5, 6] построим режим, ответвляющийся от нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Для этого введем в рассмотрение малый параметр  $\varepsilon$ , который косвенно характеризует собой отклонение от нуля.

В случае нулевого собственного значения  $\lambda$  матрицы линеаризованной системы (3), (4) малый параметр  $\varepsilon$  обозначает переход из области  $S$  в область  $U$  по параметру  $\alpha$  для фиксированного значения  $\gamma$ . Здесь параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u, \quad (14)$$

где  $\alpha_u$  вычисляется по формуле (7).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (1), (2) по степеням малого параметра

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Здесь функции  $u_j = u_j(s)$  зависят от медленного времени  $s = \varepsilon t$ ,

а  $u_{j,0} = \rho(s) \cosh \delta_u x_j$ , где  $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$ ,  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$ . Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (14) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов  $u_{j,0}$ ,  $u_{j,1}$ ,  $u_{j,2}$ :

$$\dot{u}_{j,0} = N^2 (u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0},$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2 (u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2 (u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2}, \quad (16)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,2} + u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}^3. \quad (17)$$

Учитывая, что у системы (16) краевое условие (17) содержит кубическую нелинейность, и, тем самым, для функций  $u_{j,1}$  система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (16), (17) можно получить укороченное уравнение на величину  $\rho$ :

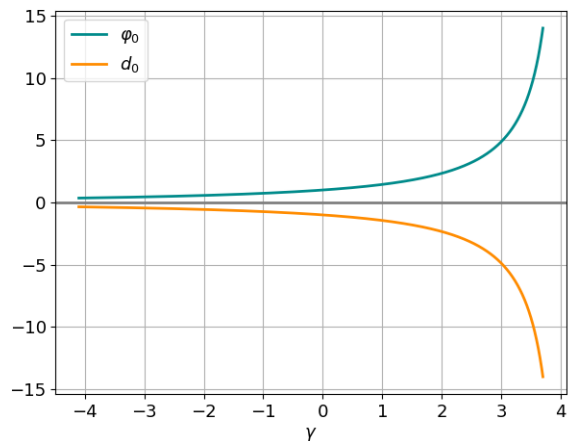
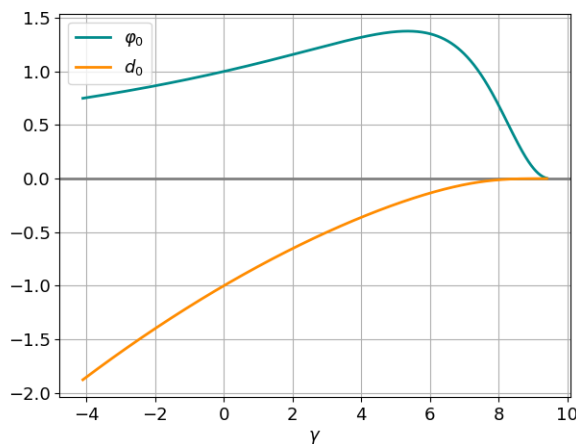
$$\rho' = \varphi_0 \rho + d_0 \rho^3. \quad (18)$$

Для уравнения (18) коэффициенты  $\varphi_0, d_0$  выглядят следующим образом:

$$\varphi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch} \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}, \quad (19)$$

$$d_0 = \frac{2\beta \delta_u \operatorname{ch}^3 \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}. \quad (20)$$

Для коэффициентов  $\varphi_0, d_0$  при различных значениях индекса  $k$  были построены зависимости от параметра  $\gamma$ . Согласно численным результатам для  $\beta < 0$  и  $\gamma < \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле (9),  $\varphi_0$  оказывался положительным, а  $d_0$  – отрицательным. Другими словами, пара неустойчивых состояний равновесия сливалась с устойчивым нулевым решением системы (1), (2) и в результате дивергентной потери устойчивости образовывалась пара устойчивых состояний равновесия в окрестности неустойчивого нулевого решения. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  для значений индекса  $k=17$  и  $k=26$  при  $\beta = -1$  показаны на рис. 4.

а)  $k=17$ б)  $k=26$ Рис. 4. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  при  $\beta = -1$ 

В случае  $k=25$  для всех  $\gamma$  таких, что  $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), малый параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha_u - \alpha.$$

Здесь коэффициент  $\varphi_0$  рассчитывается по формуле (19), но имеет противоположный знак, а коэффициент  $d_0$  вычисляется по формуле (20). Для данного случая  $\varphi_0$  и  $d_0$  оказывались положительными, что говорит о грубой потере устойчивости нулевого решения системы (1), (2).

При условии, что  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ , уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho_* = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}}$ , причем  $\rho$  стремится к этому состоянию равновесия при  $s \rightarrow +\infty$ . Подставляя в нормальную форму (15) значение  $\rho$ , получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (1), (2) (см. также [6]):

$$u_j = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\varphi_0}{d_0} \operatorname{ch} \delta_u x_j} + O(\varepsilon). \quad (21)$$

При условии, что  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 > 0$ , происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho = \rho_*$ , где  $\rho_* = \sqrt{\frac{\varphi_0}{d_0}}$ . При подстановке полученного значения  $\rho$  в нормальную форму (15) получаем асимптотическое приближение (21) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающихся к нулевому решению системы (1), (2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и отбирающих у него устойчивость (см. также [7–10]).

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2) это позволяет доказать следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ , для  $\gamma \leq \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле (9). Тогда для любого  $\gamma < \Gamma_u$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

**Теорема 2.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$  для  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12). Тогда для любого  $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

В случае чисто мнимого собственного значения  $\lambda$  матрицы линеаризованной системы (3), (4) малый параметр  $\varepsilon$  обозначает переход из области  $S$  в область  $C$  по параметру  $\alpha$  для фиксированного значения  $\gamma$ . Здесь  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_f, \quad (22)$$

где  $\alpha_f$  вычисляется по формуле (8). Так же как и в случае дивергентной потери устойчивости, воспользуемся нормальной формой (15), для которой



$$u_{j,0} = z(s)e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j},$$

где  $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$ , а  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$  (см. также [11]). Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (22) приводит к последовательно разрешимым системам для собственных векторов  $u_{j,0}, u_{j,1}, u_{j,2}$ :

$$\dot{u}_{j,0} = N^2 (u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,0},$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2 (u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2 (u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2}, \quad (23)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,2} + u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}^3. \quad (24)$$

Учитывая, что у системы (23) краевое условие (24) содержит кубическую нелинейность и, тем самым, для функций  $u_{j,1}$  система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (23), (24) можно получить укороченное уравнение на амплитуду колебаний нулевого решения:

$$z' = (\varphi_0 + i\psi_0)z + (d_0 + ic_0)z|z|^2. \quad (25)$$

Для уравнения (25) коэффициенты  $\varphi_0, d_0$  рассчитываются по формулам

$$\varphi_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{2\delta_c \operatorname{ch} \delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_f x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k} \right), \quad (26)$$

$$d_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{3\beta \delta_c (\operatorname{ch}((\delta_c + 2\operatorname{Re} \delta_c) x_k) + \operatorname{ch}((\delta_c + 2i \operatorname{Im} \delta_c) x_k) + 2\operatorname{ch} \overline{\delta_c} x_k)}{2(\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_f x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k)} \right). \quad (27)$$

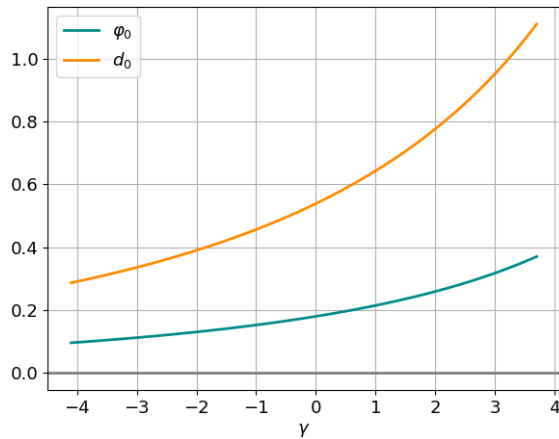
Для коэффициентов  $\varphi_0, d_0$  при различных значениях индекса  $k$  были построены зависимости от параметра  $\gamma$ . Согласно численным результатам для  $\beta < 0$  и  $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  вычисляется по формуле (10),  $\varphi_0$  оказывался положительным, а  $d_0$  оказывался отрицательным. Другими словами, нулевое

решение системы (1), (2) теряло свою устойчивость колебательным способом (см. также [12]): оно становилось неустойчивым, а вокруг него образовывался устойчивый цикл порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

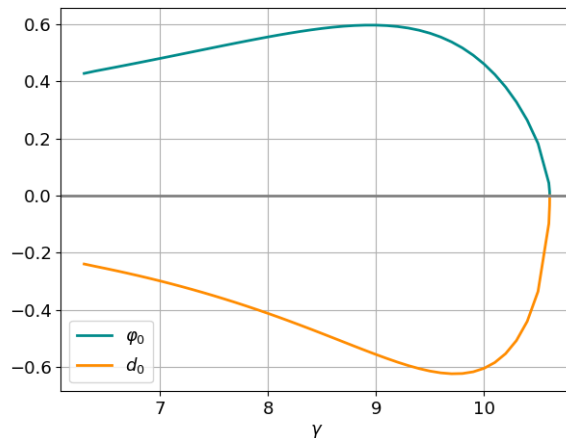
В том случае, когда малый параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha_c - \alpha,$$

коэффициент  $\varphi_0$  рассчитывается по формуле (26), но имеет противоположный знак, а коэффициент  $d_0$  считается по формуле (27). Согласно численным результатам для всех  $\gamma < \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  вычисляется по формуле (13), оба коэффициента  $\varphi_0$  и  $d_0$  оказывались положительными, что говорит о наличии неустойчивого цикла порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , окружающего нулевое решение системы (1), (2). Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  для  $k=1$  и  $k=23$  при  $\beta=-1$  и различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  показаны на рис. 5.



а)  $k=1, \varepsilon = \alpha_c - \alpha$



б)  $k=23, \varepsilon = \alpha - \alpha_f$

Рис. 5. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  при  $\beta=-1$

Осуществляя переход к полярной системе координат для  $z = \rho e^{i\nu}$ , уравнение (25) сводится укороченной системе (см., например, [6, 13]) вида

$$\rho' = \Phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \quad (28)$$

$$\nu' = \Psi_0 + c_0 \rho^2. \quad (29)$$

В системе (28), (29) первое уравнение не зависит от второго, в связи с этим его можно решать отдельно. В частности, при условии, что  $\Phi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ , уравнение (28) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho_* = \sqrt{-\frac{\Phi_0}{d_0}}$ , причем  $\rho$  стремится к этому состоянию равновесия при  $s \rightarrow +\infty$ .

В этом случае из второго уравнения заключаем, что  $\nu(s) = \sigma s + \gamma$ , где  $\gamma$  – произвольное действительное число, а коэффициент  $\sigma$  вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \frac{\Psi_0 d_0 - c_0 \Phi_0}{d_0}.$$

Подставляя в нормальную форму (15) полученные значения  $\rho$  и  $\nu$ , получаем асимптотическое приближение для пространственно неоднородного цикла исходной системы (1), (2):

$$u_j = \sqrt{-\varepsilon \frac{\Phi_0}{d_0}} \left( e^{i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + e^{-i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j} \right) + O(\varepsilon). \quad (30)$$

При условии, что  $\Phi_0 > 0$  и  $d_0 > 0$ , происходит обратная бифуркация Андронова – Хопфа (см., например, [5, 12]). В этом случае уравнение (28) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho = \rho_*$ , где  $\rho_* = \sqrt{\frac{\Phi_0}{d_0}}$ , которому соответствует неустойчивый цикл с асимптотикой (30), стягивающийся при  $\varepsilon = 0$  к нулевому состоянию равновесия системы (1), (2) и забирающий у него устойчивость.

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяют доказать следующие теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$  для  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  вычисляется с помощью (10). Тогда для любого  $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой (30).

**Теорема 4.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$  для  $\gamma \leq \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  вычисляется с помощью (13). Тогда для любого  $\gamma < \Gamma_c$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный неустойчивый цикл с асимптотикой (30).

### **Заключение**

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. Для значений параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия в одном случае и цикла – в другом.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см., например, [14, 15]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см., например, [11]).

*Автор благодарит С. Д. Глызину за постановку задачи и обсуждение результатов.*

### **Библиографический список**

1. **Глызин, С. Д.** Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. – 2020. – Т. 203, № 1. – С. 10–25.
2. **Glyzin, S. D.** Difference Approximations of a Reaction–Diffusion Equation on Segments / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2018. – Vol. 52, № 7. – P. 762–776.
3. **Glyzin, S. D.** Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. – Vol. 47, № 7. – P. 452–469.
4. **Глызин, С. Д.** Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1400–1418.
5. **Гукенхеймер, Дж.** Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
6. **Глызин, С. Д.** Локальные методы анализа динамических систем / С. Д. Глызин. – Ярославль : ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2006. – 91 с.
7. **Марсден, Дж. Е.** Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, Д. Мак-Кракен. – Москва : Мир, 1980. – 368 с.
8. **Хэссард, Б.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – Москва : Мир, 1985. – 280 с.
9. **Wiggins, S.** Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods / S. Wiggins. – New York : Springer, 1989. – 672 p.
10. **Wiggins, S.** Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. – New York : Springer, 2003. – 882 p.
11. **Кашенко, С. А.** О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием / С. А. Кашенко // Моделирование и анализ информационных систем. – 2017. – Т. 24, № 2. – С. 168–185.
12. **Анищенко, В. С.** Лекции по нелинейной динамике : учеб. пособие для вузов / В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова. – Москва ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.
13. **Митропольский, Ю. А.** Интегральные многообразия в нелинейной динамике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – Москва : Наука, 1973. – 512 с.

14. Гурли, С. А. Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика / С. А. Гурли, Дж. В.-Х. Соу, Дж. Х. Ву // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 84–120.
15. Britton, N. F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology / N. F. Britton. – New York : Academic Press, 1986. – 277 p.

### References

1. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2020, vol. 203, no. 1, pp. 10–25. [In Russian]
2. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2018, vol. 52, no. 7, pp. 762–776.
3. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013, vol. 47, no. 7, pp. 452–469.
4. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1400–1418. [In Russian]
5. Gukenkheymer Dzh., Kholms F. *Nelineynye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkatsii vektornykh poley* [Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields]. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002, 560 p. [In Russian]
6. Glyzin S. D. *Lokal'nye metody analiza dinamicheskikh sistem* [Local methods for analysis of dynamical systems]. Yaroslavl: YarGU im. P. G Demidova, 2006, 91 p. [In Russian]
7. Marsden Dzh. E., Mak-Kraken D. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [Cycle birth bifurcation and its applications]. Moscow: Mir, 1980, 368 p. [In Russian]
8. Khessard B., Kazarinov N., Ven I. *Teoriya i prilozheniya bifurkatsii rozhdeniya tsikla* [Theory and applications of cycle birth bifurcation]. Moscow: Mir, 1985, 280 p. [In Russian]
9. Wiggins S. *Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. New York: Springer, 1989, 672 p.
10. Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer, 2003, 882 p.
11. Kashchenko S. A. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem* [Modeling and analysis of information systems]. 2017, vol. 24, no. 2, pp. 168–185. [In Russian]
12. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. *Leksii po nelineynoy dinamike: ucheb. posobie dlya vuzov* [Lectures on nonlinear dynamics: teaching aid for universities]. Moscow; Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2011, 516 p. [In Russian]
13. Mitropol'skiy Yu. A., Lykova O. B. *Integral'nye mnogoobraziya v nelineynoy dinamike* [Integral manifolds in nonlinear dynamics]. Moscow: Nauka, 1973, 512 p. [In Russian]
14. Gurli S. A., Sou Dzh. V.-Kh., Vu Dzh. Kh. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary mathematics. Fundamental directions]. 2003, vol. 1, pp. 84–120. [In Russian]
15. Britton N. F. *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*. New York: Academic Press, 1986, 277 p.

**Ивановский Леонид Игоревич**

аспирант, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14)

E-mail: leon19unknown@gmail.com

**Ivanovskiy Leonid Igorevich**

Postgraduate student, P. G. Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya street, Yaroslavl, Russia)

**Образец цитирования:**

Ивановский, Л. И. Динамика одной системы диффузионно связанных дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью / Л. И. Ивановский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 15–30. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-2.

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Цель исследования – разработка численного метода для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

*Материалы и методы.* Применяется модифицированный метод разделения переменных в области неоднородности для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

*Результаты.* Представлен модифицированный метод разделения переменных в области неоднородности для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

*Выводы.* Предложенный численный метод является эффективным средством для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

**Ключевые слова:** электромагнитные волны, дифракционные решетки, метод разделения переменных.

*E. V. Gusarova, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak*

## ON A METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON A DIFFRACTION GRATING

### Abstract.

*Background.* The aim of the study is to develop a numerical method for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

*Materials and methods.* A modified method of separation of variables in the region of inhomogeneity is used to solve the problem of diffraction of electromagnetic waves by a two-dimensional periodic diffraction grating.

*Results.* A modified method of separation of variables in the region of inhomogeneity is presented for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

*Conclusions.* The proposed numerical method is an effective tool for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

**Keywords:** electromagnetic waves, diffraction gratings, variable separation method.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00219А.

© Гусарова Е. В., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

### Введение

Дифракционные решетки находят разнообразное применение в электродинамике и используются уже на протяжении нескольких десятилетий. Разработаны математические численные методы для расчета электромагнитных полей и основных характеристик решеток [1–4]. Однако в связи с возросшей сложностью современных устройств возникает необходимость разработки новых эффективных численных методов расчета характеристик решеток с неравномерным расположением штрихов в периоде и большим их количеством, что приводит к задачам, требующим значительных вычислительных ресурсов для достижения высокой точности.

В статье предлагается новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке. Метод основан на разложении решения в области неоднородности решетки по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора, который учитывает условия сопряжения на границах по одной из переменных, а также условия квазипериодичности. Это позволяет выписать решение задачи дифракции в области неоднородности в явном виде. При этом численному определению подлежат только собственные значения этого оператора.

### 1. Постановка задачи дифракции волны на решетке

Рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной монохроматической Е-поляризованной волны на бесконечной двумерной периодической диэлектрической решетке с неравномерным распределением штрихов в периоде.

Образующие цилиндрической поверхности решетки параллельны оси  $Oy$  декартовой системы координат  $Oxyz$ . В качестве падающей волны рассматривается плоская Е-поляризованная волна единичной амплитуды.

Из системы уравнений Максвелла и из условий сопряжения на поверхности решетки следуют уравнения, связывающие неизвестные коэффициенты в разложениях по собственным функциям дифференциального оператора в области неоднородности.

Отыскание этих коэффициентов позволяет определить вид электромагнитного поля в области решения задачи. Кроме того, через полученное решение можно определить все другие характеристики дифракционной решетки, имеющие практическое значение.

Будем рассматривать задачу дифракции Е-поляризованной плоской электромагнитной волны на диэлектрической периодической решетке, расположенной на диэлектрической подложке.

В качестве падающей на решетку волны рассмотрим плоскую волну единичной амплитуды

$$u_0(x, y) = \exp(ik_0x \sin \varphi - ik_0y \cos \varphi), \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угол падения, отсчитываемый в плоскости  $Oxy$  от оси  $Oy$  против часовой стрелки.

Требуется определить полное поле, возникающее над идеально проводящей поверхностью решетки.



В случае E-поляризации все составляющие электромагнитного поля выражаются через одну компоненту поля  $E_z$ , которая будет обозначаться через  $u(x, y)$ . Эта функция должна удовлетворять:

- уравнению Гельмгольца  $(\Delta + k_0^2)u = 0$  всюду вне контура решетки;
- условиям излучения на бесконечности;
- условиям сопряжения на поверхности решетки;
- условию квазипериодичности Флоке;
- условию конечности энергии в любой ограниченной области.

Постановка задачи дифракции на периодической решетке является традиционной, имеется в [1, 2], и мы не будем ее здесь повторять.

Рассмотрим решетки, профиль которых представляет собой ломаную линию, состоящую из отрезков, параллельных осям  $Ox, Oy$ . В направлении оси  $Ox$  решетка является периодической с периодом  $T > 0$ .

Неограниченную двумерную область  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  решения задачи представим объединением трех открытых подобластей:

$$V_0 = \{(x, y) \in V : y > h > 0\} \text{ (здесь и далее } h \text{ – высота профиля решетки),}$$

$$V_1 = \{(x, y) \in V : 0 < y < h\} \text{ и } V_2 = \{(x, y) \in V : y < 0\},$$

и двух прямых:

$$S_h = \{(x, y) : y = h\} \text{ и } S_0 = \{(x, y) : y = 0\}.$$

Области  $V_0$  и  $V_1$  однородны и характеризуются заданными волновыми числами  $k_0$  и  $k_1$  соответственно. В области  $V_1$  выделим подобласть  $V_T$  точек с абсциссой  $x \in [0, T]$  и представим ее в виде

$$\bar{V}_T = \bigcup_i \bar{\Pi}_i, \quad \bar{\Pi}_i = (a_i, a_{i+1}) \times (0, h), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

здесь  $a_0 = 0$ ,  $a_N = a = T$ .

В прямоугольниках  $\bar{\Pi}_i$  значения волнового числа равны  $k_i$  и, вообще говоря, различны. Величина шага в решетке  $a_{i+1} - a_i$  непостоянна, т.е. рассматриваются неравномерные решетки.

## 2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Представим полное поле  $u(x, y)$  в неограниченных областях в виде рядов:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l \exp\{i(2\pi l / T)x + i\gamma_l^{(1)}(y - h)\}, \quad y > h, \quad (2)$$

$$u(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l \exp\{i(2\pi l / T)x - i\gamma_l^{(2)}y\}, \quad y < 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\gamma_l^{(j)} = \left( k_j^2 - (2\pi l / T)^2 \right)^{1/2}, \quad j = 0, 1, \operatorname{Re} \gamma_l^{(j)} \geq 0, \operatorname{Im} \gamma_l^{(j)} \geq 0, \quad (4)$$

$r_l$  и  $t_l$  – амплитудные коэффициенты отражения и прохождения  $l$ -х мод.

Опишем модифицированный метод разделения переменных, предлагаемый для решения задачи. Решение задачи в прямоугольниках  $\prod_i$  будем искать в виде рядов вида

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y), \quad (5)$$

учитывая, что  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике, а также условиям сопряжения на сторонах прямоугольников  $x = a_i$  и условию квазипериодичности.

Применяя метод разделения переменных, получим, что функция  $Y_l$  имеет вид

$$Y_l(y) = b_l^{(1)} \exp(i\sqrt{\lambda_l} y) + b_l^{(2)} \exp(-i\sqrt{\lambda_l} (y - h)). \quad (6)$$

Функции  $X_l(x)$  являются решениями следующих задач на собственные значения:

$$\frac{X_l''}{X_l} + \kappa^2(x) = \lambda_l, \quad \kappa^2(x) = \kappa_l^2, \quad x \in (a_i, a_{i+1}); \quad (7)$$

$$X_l(0) = AX_l(a), \quad X_l'(0) = AX_l'(a); \quad [X_l] = [X_l'] = 0.$$

Здесь  $A$  – константа, входящая в условие квазипериодичности.

Введем обозначение:  $\gamma_i = \sqrt{\kappa_i^2 - \lambda_l}$ . Из формул (7) получаем:

$$X_l'' + (\kappa^2(x) - \lambda_l) X_l = 0, \quad (8)$$

$$X_l(x) = c_i \sin \gamma_i (x - a_i) + d_i \cos \gamma_i (x - a_i), \quad x \in (a_i, a_{i+1}),$$

$$X_l(x) = c_{i+1} \sin \gamma_{i+1} (x - a_{i+1}) + d_{i+1} \cos \gamma_{i+1} (x - a_{i+1}), \quad x \in (a_{i+1}, a_{i+2}). \quad (9)$$

Из условий сопряжения во внутренних узлах  $a_i$  получаем систему из  $(2N - 2)$  уравнений

$$c_i \sin \gamma_i (a_{i+1} - a_i) + d_i \cos \gamma_i (a_{i+1} - a_i) = d_{i+1},$$

$$c_i \sin \gamma_i (a_{i+1} - a_i) - d_i \sin \gamma_i (a_{i+1} - a_i) = c_{i+1} \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}, \quad 0 \leq i \leq N - 2, \quad (10)$$

а из условий квазипериодичности получим еще два уравнения:

$$d_0 = Ac_N \sin \gamma_N (a_N - a_{N-1}) + Ad_N \cos \gamma_N (a_N - a_{N-1}),$$

$$c_0 \gamma_0 = A \gamma_N (c_N \cos \gamma_N (a_N - a_{N-1}) - d_N \sin \gamma_N (a_N - a_{N-1})). \quad (11)$$

Таким образом, получена однородная система  $2N$  уравнений для нахождения  $2N$  неизвестных. Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы системы равен нулю.

Задачу об отыскании собственных чисел  $\lambda_l$  задачи можно свести к проблеме вычисления некоторого определителя второго порядка.

Записывая уравнения (10), (11) в матричной форме

$$(c_{i+1}, d_{i+1})^T = S_i (c_i, d_i)^T \quad (0 \leq i \leq N-2),$$

$$(c_0, d_0)^T = Q (c_N, d_N)^T, \quad (12)$$

сведем исходную систему линейных алгебраических уравнений к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$(c_0, d_0)^T = QS_{N-2} \dots S_0 (c_0, d_0)^T, \quad (13)$$

откуда получим требуемое уравнение:

$$\det(I - QS_{N-2} \dots S_0) = 0. \quad (14)$$

В качестве  $(c_0, d_0)^T$  можно взять любое нетривиальное решение системы (13) при  $\lambda = \lambda_l$ .

Определив собственные значения  $\lambda_l$  и собственные функции задачи (7), получим из (5) представление решения  $u(x, y)$  в конечной области  $V_T$ :

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y) \quad (15)$$

с неизвестными коэффициентами  $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ .

Заметим, что за счет выбора функций в (2), (3) и выполнения условий (11) условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Далее, коэффициенты  $r_l$ ,  $t_l$  и  $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$  находятся из условий сопряжения при  $y = 0$  и  $y = h$ :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(h) = u_0(x, h) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l \exp\{i(2\pi l / T)x\}, \quad (16)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l'(h) = u_0'(x, h) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l i \gamma_l^{(1)} \exp\{i(2\pi l / T)x\}, \quad (17)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l \exp\{i(2\pi l / T)x\}, \quad (18)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l'(0) = - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l i \gamma_l^{(2)} \exp\{i(2\pi l / T)x\}, \quad (19)$$

где в  $u'_0(x, h)$  производная берется по  $y$  в точке  $h$ .

Заметим, что выражения справа в формулах (16)–(19) – это ряды Фурье функции на отрезке  $[0, T]$ . Умножая (16)–(19) на соответствующие экспоненты и интегрируя выражения от 0 до  $T$ , получаем два уравнения относительно  $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} & i \gamma_l^{(1)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(h) - u_0(x, h) \right) dx = \\ & = \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p'(h) - u'_0(x, h) \right) dx; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & -i \gamma_l^{(2)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(0) \right) dx = \\ & = \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p'(0) \right) dx \end{aligned} \quad (21)$$

для всех целых  $l$ .

### 3. Численный метод решения задачи

Для численного решения задачи следует взять

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^M X_l(x) Y_l(y) \quad (22)$$

для некоторого  $M$ . Тогда имеем  $(2M + 2)$  коэффициентов  $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ . Выберем  $M$  четным числом. В уравнениях (20), (21) возьмем  $(M + 1)$  значений  $l = -M / 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M / 2$ .

В результате получается система линейных алгебраических уравнений порядка  $(2M + 2)$ :

$$\begin{aligned} & i \gamma_l^{(1)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p(h) - u_0(x, h) \right) dx = \\ & = \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left( \sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p'(h) - u'_0(x, h) \right) dx, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 & -i\gamma_l^{(2)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p(0)\right) dx = \\
 & = \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} e \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p'(0)\right) dx, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где  $l = -M/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M/2$ .

Все интегралы в системе (23), (24) вычисляются численно с помощью какой-либо квадратурной формулы. Также численно определяются собственные значения  $\lambda_l$ .

### Заключение

В статье предложен новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке. Метод основан на разложении решения в области неоднородности решетки по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора, который учитывает условия сопряжения на границах по одной из переменных, а также условия квазипериодичности. Это позволяет выписать решение задачи дифракции в области неоднородности в явном виде. Для численного определения собственных значений этого оператора получено уравнение, которое может быть решено любым из методов поиска вещественных корней на отрезке.

### Библиографический список

1. Шестопапов, В. П. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1986. – 232 с.
2. Шестопапов, В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопапов, Ю. К. Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1989. – 216 с.
3. Попов, Е. Gratings: Theory and Numeric Applications / E. Popov. – Second Revisited Edition. – Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. – 59 p.
4. Design of broadband polarization-independent multilayer dielectric grating / Chen Junming et al. // Proc. of SPIE. – 2017. – Vol. 10339. – P. 1033–911.

### References

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko Yu. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. T. 1. Difraktsionnyye reshetki* [Resonant scattering of waves. Volume 1. Diffraction gratings]. Kiev: Naukova dumka, 1986, 232 p. [In Russian]
2. Shestopalov V. P., Sirenko Yu. K. *Dinamicheskaya teoriya reshetok* [Dynamic lattice theory]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p. [In Russian]
3. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications*. Second Revisited Edition. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014, 59 p.
4. Junming Chen et al. *Proc. of SPIE*. 2017, vol. 10339, pp. 1033–911.

**Гусарова Елена Васильевна**

аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: gusarova.gu@yandex.ru

**Gusarova Elena Vasil'evna**

Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

***Смирнов Юрий Геннадьевич***

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

***Smirnov Yuriy Gennad'evich***

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head  
of the sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

***Цупак Алексей Александрович***

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

***Tsupak Aleksey Aleksandrovich***

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-  
department of mathematics and supercom-  
puter modeling, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Гусарова, Е. В. Об одном методе решения задачи дифракции электромагнитной волны на дифракционной решетке / Е. В. Гусарова, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 31–38. –DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-3.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Изучение преобразований Бэклунда является одной из актуальных тем в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Такие преобразования применяются для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и солитонных. Вместе с этим они представляют собой пример дифференциально-геометрической структуры, порожденной дифференциальными уравнениями. Преобразования Бэклунда дают возможность получить не только пары уравнений, но и решение одного из них, если решение другого известно. Данные преобразования играют важную роль в интегрируемых системах, так как выявляют внутренние связи между различными интегрируемыми свойствами, такими как определение симметрий, наличие гамильтоновой структуры. В последнее время в этой области было проведено много исследований. Цель работы – получение новых преобразований и автопреобразований Бэклунда для обобщенных уравнений Лиувилля с показательной-степенной нелинейностью, имеющей множитель, зависящий от первых производных.

*Материалы и методы.* Рассматривается построение преобразований Бэклунда для нелинейных уравнений в частных производных второго порядка солитонного типа с логарифмической нелинейностью и гиперболической линейной частью. Построение преобразований базируется на методе, предложенном Клэрэном, для уравнений второго порядка типа Монжа – Ампера.

*Результаты.* Для исследуемых уравнений с помощью преобразований Бэклунда найдены новые уравнения, которые дают возможность отыскать решения исходных нелинейных уравнений, а также выявить внутренние связи между различными интегрируемыми уравнениями.

*Выводы.* Результаты представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в частности солитонных уравнений. Полученные с помощью дифференциальных связей новые уравнения могут использоваться для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также при решении множества прикладных задач в физике и технике.

**Ключевые слова:** нелинейные уравнения в частных производных, гиперболические уравнения, преобразования Бэклунда, метод Клэрэна, дифференциальные связи, уравнение Лиувилля.

## BACKLUND TRANSFORMATIONS FOR LIOUVILLE'S EQUATIONS WITH EXPONENTIAL NONLINEARITY

**Abstract.**

*Background.* The study of Backlund's transformations is one of the current topics in the theory of differential equations in partial derivatives. Such transformations are used to find solutions to nonlinear differential equations, including solitonic equations. At the same time, they represent an example of the differential-geometric structure generated by differential equations. Backlund transformations made it possible to obtain not only pairs of equations, but also the solution of one if the solution of the other was known. Transformation data played an important role in integrable systems, as it revealed internal relationships between different integrable properties, such as the definition of symmetry, the presence of a Hamiltonian structure. In recent years, many studies have been carried out in this area. The aim of the work is to obtain new Backlund transformations and auto-transformations for generalized Liouville's equations with indicative-degree nonlinearity having a multiplier dependent on the first derivatives.

*Materials and methods.* This paper examines the construction of Backlund transformations for nonlinear equations in second-order partial derivatives of salt-ton type with logarithmic nonlinearity and hyperbolic lie-neon part. The construction of transformations is based on the method suggested by Clairan for second-order equations of the Monge-Ampere type.

*Results.* For the equations examined in the article, new equations have been found by means of the Backlund transformations, which make it possible to find solutions to the original nonlinear equations, as well as to identify internal connections between different integrable equations.

*Conclusions.* The results are of interest in the study of nonlinear differential equations in partial derivatives, particularly soliton equations. The new equations obtained by differential linkages can be used for further research of equations of this type, as well as in solving many applications in physics and engineering.

**Keywords:** nonlinear equations in partial derivatives, hyperbolic equations, Backlund transformations, the Clairan method, differential bonds, the Liouville's equation.

## Введение

Изучение преобразований Бэклунда является одной из актуальных тем в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Такие преобразования применяются для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений. В силу сложности различных нелинейных уравнений не существует единого метода их решения. Для интегрируемых систем разработаны эффективные методы, такие как метод обратной задачи рассеяния [1, 2], метод Хироты [3], метод Пенлеве [4], преобразование Бэклунда [5–7], метод отображения и деформации [2] и др.

Преобразования Бэклунда представляют собой пример дифференциально-геометрических структур, порожденных дифференциальными уравнениями. Они дают возможность получить не только пары уравнений, но и решение одного из них, если решение другого известно. Данные преобразования играют важную роль в интегрируемых системах, так как выявляют внутренние связи между различными свойствами, такими как определение симметрий [8, 9], наличие гамильтоновой структуры [10–12]. В последнее время в этой области было проведено множество исследований [13–18].

Настоящая статья представляет собой изложение новых результатов по преобразованиям и автопреобразованиям Бэклунда для обобщенных уравне-



ний Лиувилля. В работе рассматриваются частные случаи уравнения Лиувилля с показательно-степенной нелинейностью, имеющей множитель, зависящий от первых производных. Построение преобразований базируется на методе Клэрэна [19] и имеет в таком подходе ясный геометрический смысл.

### 1. Материал и методика

Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического вида

$$v_{\xi\eta} = f(v, v_{\xi}, v_{\eta}). \quad (1)$$

Применим разработанный Клэрэном метод построения преобразований Бэклунда более общего вида, когда функции  $z$  и  $v$  удовлетворяют различным дифференциальным уравнениям в частных производных. Техника построения преобразований Бэклунда носит общий характер, относящийся к любому уравнению гиперболического вида, и полностью повторяет изложение для уравнения Лиувилля.

Дифференциальные уравнения второго порядка вида

$$f_1(\xi, \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}) z_{\xi\xi} + f_2(\xi, \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}) z_{\xi\eta} + f_3(\xi, \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}) z_{\eta\eta} + f_4(\xi, \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}) = 0$$

называются уравнениями Монжа – Ампера [20]. Преобразование Бэклунда, связывающее два таких уравнения второго порядка для функций  $v$  и  $z$ , задается парой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = F_1\left(z, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = F_2\left(z, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right). \quad (2b)$$

Для задания явного вида преобразования необходимо найти функции  $F_1$  и  $F_2$ . Условие интегрируемости (равенство смешанных вторых производных) требует, чтобы функции (2) удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Каждая из переменных  $z, z_{\xi}, z_{\eta}$  соответственно  $v, v_{\xi}, v_{\eta}$  зависит от  $\xi$  и  $\eta$ . Учитывая равенства (2), получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = \frac{\partial F_1}{\partial z} z_{\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v} v_{\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v_{\xi}} v_{\xi\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v_{\eta}} v_{\eta\eta}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = \frac{\partial F_2}{\partial z} z_{\xi} + \frac{\partial F_2}{\partial v} v_{\xi} + \frac{\partial F_2}{\partial v_{\xi}} v_{\xi\xi} + \frac{\partial F_2}{\partial v_{\eta}} v_{\eta\xi}. \quad (3b)$$

Используя формулы (2) для исключения  $z_\xi$ ,  $z_\eta$ , окончательно получим условие совместности в виде

$$\left(-\frac{\partial F_2}{\partial v_\xi}\right)v_{\xi\xi} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial v_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial v_\eta}\right)v_{\xi\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v_\eta}v_{\eta\eta} - \frac{\partial F_2}{\partial v}v_\xi + \frac{\partial F_1}{\partial v}v_\eta + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1 \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Функцию  $z$  считаем известной. Тогда, пока хотя бы один из коэффициентов

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_\eta}, \frac{\partial F_2}{\partial v_\xi} \text{ или } \left(\frac{\partial F_1}{\partial v_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial v_\eta}\right)$$

не равен нулю, уравнение (4) является дифференциальным уравнением в частных производных для функции  $v$ .

Так как уравнение (1) содержит  $v_{\xi\eta}$ , но не  $v_{\xi\xi}$  или  $v_{\eta\eta}$ , из условия совместности (4) мы ожидаем, что

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_\xi} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial v_\eta} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial v_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial v_\eta} \neq 0.$$

Тогда надо предположить, что

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = F_1\left(z, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = F_2\left(z, v, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right). \quad (5b)$$

Поэтому уравнение (4) примет вид

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial v_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial v_\eta}\right)v_{\xi\eta} - \frac{\partial F_2}{\partial v}v_\xi + \frac{\partial F_1}{\partial v}v_\eta + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1 \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$$

Производная по  $\eta$  от (5a) равна

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial F_1}{\partial z}z_\eta + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}}v_\eta + \frac{\partial F_1}{\partial v_\xi}v_{\xi\eta}. \quad (6)$$

Дальнейшие рассуждения зависят от вида рассматриваемого уравнения. Рассмотрим полученные в работе [21] следующие уравнения:

$$v_{\eta\xi} = (a + bv)e^v v_\xi - v_\xi v_\eta, \quad (7)$$

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}}e^v [1 + 2v]v_\xi - v_\xi v_\eta, \quad (8)$$

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v [v_{\eta} - v_{\xi}], \quad (9)$$

$$v_{\eta\xi} = e^v v_{\eta} - e^{-v} v_{\xi}. \quad (10)$$

Данные уравнения имеют гиперболическую линейную часть и нелинейную часть, зависящую от функции и первых производных по переменным  $\eta$  и  $\xi$ , причем производные  $v_{\eta}, v_{\xi}$  входят в равенства только в первой степени, поэтому общий вид этих уравнений перепишем в виде

$$v_{\eta\xi} = \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1),$$

где единица в показателе обозначает, что эти переменные входят в равенство только в первой степени.

Будем считать, что преобразования Беклунда дают возможность перейти к самому простому гиперболическому уравнению  $z_{\xi\eta} = 0$ .

Используя равенства (5b), (6) и (7), получим

$$z_{\xi\eta} = \frac{\partial F_1}{\partial z} F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial v} v_{\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v_{\xi}} \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1) = 0. \quad (11)$$

Возьмем от (11) производную по  $v_{\eta}$ , тогда  $\frac{\partial \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1)}{\partial v_{\eta}}$  не зависит от

$v_{\eta}$ , так как  $v_{\eta}$  входит в равенство только в первой степени:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial v_{\eta}} F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial v_{\eta}} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial v_{\eta}} v_{\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_{\xi} \partial v_{\eta}} \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1) + \frac{\partial F_1}{\partial v_{\xi}} \frac{\partial \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1)}{\partial v_{\eta}} = 0.$$

С учетом равенств (5) имеем  $\frac{\partial F_1}{\partial v_{\eta}} = 0$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial v_{\xi}} = 0$ , тогда  $\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial v_{\eta}} = 0$ , и оста-

ется равенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial v_{\eta}} + \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial v_{\xi}} \frac{\partial \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1)}{\partial v_{\eta}} = 0.$$

Выполнив повторное дифференцирование по  $v_{\eta}$ , получим

$$\frac{\partial^2 \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1)}{\partial v_{\eta}^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial v_{\eta}} \frac{\partial F_2}{\partial v_{\eta}} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v_{\eta}^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial v_{\eta}} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_{\xi} \partial v_{\eta}} \frac{\partial \Omega(v, v_{\xi}^1, v_{\eta}^1)}{\partial v_{\eta}} = 0.$$

С учетом  $\frac{\partial F_1}{\partial v_\eta} = 0$  получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v_\eta^2} = 0.$$

Аналогичные действия проведем и с равенством (2b). Выполнив дифференцирование по  $v_\xi$  дважды, получим

$$\frac{\partial F_2}{\partial v} \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_\xi^2} = 0.$$

Следовательно, функции  $F_1$ ,  $F_2$  имеют линейный вид относительно  $v_\eta$  и  $v_\xi$  соответственно, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = f_1(z, v) + p_1(z, v) \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = f_2(z, v) + p_2(z, v) \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (12b)$$

Запишем условие совместности уравнения (4) с новыми условиями (12):

$$\begin{aligned} & (p_1 - p_2) \Omega(v, v_\xi^1, v_\eta^1) - \frac{\partial(f_2 + p_2 v_\eta)}{\partial v} v_\xi + \frac{\partial(f_1 + p_1 v_\xi)}{\partial v} v_\eta + \\ & + (f_2 + p_2 v_\eta) \frac{\partial(f_1 + p_1 v_\xi)}{\partial z} - (f_1 + p_1 v_\xi) \frac{\partial(f_2 + p_2 v_\eta)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

После дифференцирования этого выражение по  $v_\eta$  и  $v_\xi$  переходим к анализу равенства

$$(p_1 - p_2) \frac{\partial^2 \Omega(v, v_\xi^1, v_\eta^1)}{\partial v_\xi \partial v_\eta} - \frac{\partial p_2}{\partial v} + \frac{\partial p_1}{\partial v} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Дальнейшие исследования существенно зависят от  $\frac{\partial^2 \Omega(v, v_\xi^1, v_\eta^1)}{\partial v_\xi \partial v_\eta}$ , по-

этому перейдем к детальному анализу равенства (14) для каждого исследуемого уравнения в отдельности.

## 2. Результаты

Выполним преобразования Бэклунда для нелинейного уравнения (7).

Равенство (14) для (3) с учетом, что  $\frac{\partial^2 \Omega(v, v_\xi^1, v_\eta^1)}{\partial v_\xi \partial v_\eta} = -1$ , примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial v} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - p_1 = p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial v} - p_2. \quad (15)$$

Можно предположить, что  $p_2 \neq p_1$ , и определим связь между функциями  $p_1(z, v)$ ,  $p_2(z, v)$ . Преобразуем (15) к виду

$$\frac{\partial(p_1 - p_2)}{\partial v} - (p_1 - p_2) = p_1^2 \frac{\partial p_2}{\partial z p_1},$$

тогда, если положить  $p_1 - p_2 = e^v \varphi(z)$ , то  $p_1 = p_2 + e^v \varphi(z)$ , и на функцию  $p_2$  имеем уравнение

$$[p_2 + e^v \varphi(z)]^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_2}{p_2 + e^v \varphi(z)} = 0.$$

Очевидно, что, если  $p_2 + e^v \varphi(z) = 0$ , то  $p_1 = 0$ . Этот вариант можно рассмотреть, но при этом останется только одна неопределенная функция  $\varphi(z)$ , что уменьшает возможности варьировать неизвестными в дальнейших рассуждениях, поэтому положим  $p_2 + e^v \varphi(z) \neq 0$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{p_2}{p_2 + e^v \varphi(z)} = 0.$$

Это приводит к зависимости  $\frac{p_2}{p_2 + e^v \varphi(z)} = \psi(v)$  и определению функций

$p_2$  в виде

$$p_2 = \frac{\psi(v)}{1 - \psi(v)} e^v \varphi(z), \quad p_1 = \frac{1}{1 - \psi(v)} e^v \varphi(z).$$

Теперь равенство (13) примет вид

$$\left[ (a + bv) e^{2v} \varphi(z) - \frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{1}{1 - \psi(v)} e^v \left( f_2 \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \varphi(z) \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \right] v_\xi + \\ + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \left[ \frac{\psi(v)}{1 - \psi(v)} e^v \left( \varphi(z) \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial v} \right] v_\eta = 0.$$

Продифференцируем последнее равенство по  $v_\eta$  и это же выражение по  $v_\xi$ , в результате получим систему

$$(a + bv) e^{2v} \varphi(z) - \frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{1}{1 - \psi(v)} e^v \left( f_2 \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \varphi(z) \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) = 0, \\ f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\psi(v)}{1-\psi(v)} e^v \left( \varphi(z) \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0. \quad (16)$$

Будем искать функции  $f_1(z, v)$ ,  $f_2(z, v)$  в следующем виде:

$$f_1(z, v) = \psi_1(v) g_1(z), \quad f_2(z, v) = \psi_2(v) g_2(z).$$

Подставим эти равенства в систему (16) и выделим логарифмические производные  $\ln g_2$ ,  $\ln g_1$ ,  $\ln \varphi$ :

$$(a + bv) e^{2v} \varphi(z) - g_2(z) \frac{\partial \psi_2(v)}{\partial v} + \frac{\psi_2(v)}{1-\psi(v)} e^v g_2(z) \varphi(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \ln \frac{\varphi(z)}{g_2(z)} \right) = 0,$$

$$\psi_2(v) \psi_1(v) g_2(z) g_1(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \ln \frac{g_1(z)}{g_2(z)} \right) = 0,$$

$$g_1(z) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} - \frac{\psi(v) \psi_1(v)}{1-\psi(v)} e^v \varphi(z) g_1(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \ln \frac{\varphi(z)}{g_1(z)} \right) = 0. \quad (17)$$

Можно выбрать специальный вид функций  $g_j(z)$ ,  $\varphi(z)$  так, чтобы система приняла более простой вид, тогда дифференциальные уравнения можно будет проинтегрировать в явном виде, положим

$$g_1(z) = g_2(z) = k_1 z, \quad \varphi(z) = k_2 z, \quad k_1, k_2 - \text{const},$$

и система (17) примет вид

$$k_2 (a + bv) e^{2v} z - k_1 \frac{\partial \psi_2(v)}{\partial v} = 0,$$

$$k_1 z \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = 0.$$

В результате получены простые дифференциальные уравнения относительно функций  $\psi_2(v)$ ,  $\psi_1(v)$ , определим их:

$$\psi_2 = \frac{k_2}{k_1} \int [a + bv] e^{2v} dv = \frac{k_2}{4k_1} (2a - b + 2bv) e^{2v} + C_1, \quad \psi_1 = k - \text{const}.$$

Теперь преобразования (2) примут вид

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = k k_1 z + \frac{k_2}{1-\psi(v)} e^v z \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = z \left( \frac{k_2}{4} (2a - b + 2bv) e^{2v} + C_1 \right) + k_2 e^v z \frac{\psi(v)}{1-\psi(v)} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (18b)$$

Получено преобразование Бэклунда в виде (18). Система (18) совместна при любой функции  $\psi(v)$ . Рассмотрим следующий вариант:  $\psi(v) = 2$ ,  $C_1 = 0$ ,  $k = k_1 = 1$ ,  $k_2 = -2$ , тогда соотношения (18) примут вид

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = z + 2e^v z \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = 4e^v z \frac{\partial v}{\partial \eta} - \left( a - \frac{1}{2}b + bv \right) ze^{2v}. \quad (19)$$

Проверим, действительно ли из системы (19) можно получить уравнение (7).

Если продифференцировать первое равенство системы (19) по  $\eta$ , а второе – по  $\xi$ , тогда получим

$$z_{\xi\eta} = z_{\eta} + 2e^v z v_{\eta} v_{\xi} + 2e^v z_{\eta} v_{\xi} + 2e^v z v_{\eta} v_{\xi},$$

$$z_{\xi\eta} = 4e^v z v_{\xi} v_{\eta} + 4e^v z_{\xi} v_{\eta} + 4e^v z v_{\xi} v_{\eta} - 2(a + bv) ze^{2v} v_{\xi} - \left( a - \frac{1}{2}b + bv \right) z_{\xi} e^{2v}.$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее и приведем подобные слагаемые:

$$(1 + 2e^v v_{\xi}) z_{\eta} = 2e^v z v_{\xi} v_{\eta} + 2e^v z v_{\xi} v_{\eta} -$$

$$- 2(a + bv) ze^{2v} v_{\xi} + \left[ 4v_{\eta} - \left( a - \frac{1}{2}b + bv \right) e^v \right] e^v z_{\xi}.$$

Избавимся от производных  $z_{\eta}, z_{\xi}$ , используя соотношения (19) и сокращая на функции, отличные от нуля, получим уравнение (7).

Посмотрим, в какое уравнение переходит исходное равенство (7) с помощью преобразований (19). Для этого преобразуем равенства (19) к виду

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \xi} = 1 + 2 \frac{\partial e^v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \ln z}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial e^v}{\partial \eta} - \left( a - \frac{1}{2}b + bv \right) e^{2v}. \quad (20)$$

Попробуем выявить, как связаны функции  $z(\xi, \eta)$  и  $v(\xi, \eta)$ , учитывая, что функции удовлетворяет равенству (7). Выполним дифференцирование второго равенства (20) по переменной  $\xi$ :

$$(\ln z)_{\eta\xi} = 4(e^v)_{\eta\xi} - 2(a + bv) e^{2v} v_{\xi},$$

заменяем выражение  $(a + bv) e^v v_{\xi}$  членами из уравнения (7), тогда

$$(\ln z)_{\eta\xi} = 4(e^v)_{\eta\xi} - 2[v_{\eta\xi} + v_{\xi} v_{\eta}] e^v = 2(e^v)_{\eta\xi}.$$

С учетом первой дифференциальной связи (20) производные можно опустить с точностью до постоянной

$$\ln z = 2e^v + \xi,$$

тогда функция  $v(\xi, \eta)$  выражается через  $z(\xi, \eta)$ :

$$v = \ln \left[ \frac{1}{2} (\ln z - \xi) \right]. \quad (21)$$

Обозначим  $\ln z = w(\xi, \eta)$  и подставим (21) в (7), получим:

$$w_{\eta\xi} = \frac{1}{2} \left( a + b \ln \left[ \frac{1}{2}(w - \xi) \right] \right) (w - \xi)(w_\xi - 1). \quad (22)$$

**Утверждение 1.** Преобразования Бэклунда

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1 + 2e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \left( a - \frac{1}{2}b + bv \right) e^{2v}$$

связывают уравнение (7) с уравнением (22).

Уравнение (8) является частным случаем (7), поэтому для этого уравнения можно сформулировать

**Следствие 1.** Преобразования Бэклунда

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1 + 2e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 4e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ve^{2v}$$

связывают уравнение (8) с уравнением

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (w_\xi - 1)(w - \xi) \left( \frac{1}{2} + \ln \left[ \frac{1}{2}(w - \xi) \right] \right) - w_{\xi\eta} = 0.$$

**Утверждение 2.** Для уравнения (8) существует автопреобразование Бэклунда вида

$$e^g \frac{\partial g}{\partial \xi} = e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad e^g \frac{\partial g}{\partial \eta} = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} ve^{2v}. \quad (23)$$

**Доказательство.** Запишем равенства (23) в виде

$$\frac{\partial e^g}{\partial \xi} = e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial e^g}{\partial \eta} = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} ve^{2v}$$

и выполним перекрестное дифференцирование. Приравнивание левых частей дает

$$e^v \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + e^v \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{2v} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} \frac{\partial v}{\partial \xi} ve^{2v} = 0$$

или уравнение (8).

Теперь перепишем второе равенство (23) в виде

$$\frac{\partial e^g}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial e^v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} ve^{2v}$$

и продифференцируем по  $\xi$ :

$$\frac{\partial^2 e^g}{\partial \eta \partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 e^v}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} e^{2v} [1 - 2v] \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$



Заменяем член  $\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}v_{\xi}e^v[1+2v]$  в последнем равенстве оставшимися членами из (8), тогда

$$\frac{\partial^2 e^g}{\partial \eta \partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 e^v}{\partial \eta \partial \xi} - e^v \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right],$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial^2 e^g}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 e^v}{\partial \eta \partial \xi}.$$

Это означает, что функции  $e^g$  и  $e^v$  могут отличаться только произвольными членами вида  $\varphi(\xi) + \psi(\eta)$ , поэтому

$$e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta) = e^v. \quad (24)$$

Если  $\varphi(\xi) = \psi(\eta) = 0$ , то при замене в (8), очевидно, получаем, уравнение (8).

Выясним, что получится, если  $\varphi(\xi) \neq 0$ ,  $\psi(\eta) \neq 0$ . Выполним подстановку (24) в уравнение (8), тогда получим

$$e^g g_{\eta \xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} ([e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)]^2 \ln[e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)])_{\xi}.$$

Выполним дифференцирование

$$e^g (g_{\eta \xi} + g_{\xi} g_{\eta}) = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} 2 [e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] \ln [e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] \times \\ \times (e^g g_{\xi} + \varphi'(\xi)) + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} [e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] (e^g g_{\xi} + \varphi'(\xi))$$

и сгруппируем члены с общей производной, получим:

$$e^g (g_{\eta \xi} + g_{\xi} g_{\eta}) = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} [e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] \times \\ \times (2 \ln [e^g + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] + 1) (e^g g_{\xi} + \varphi'(\xi)),$$

где  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi(\eta)$  – произвольные функции.

**Следствие 2.** Преобразования Беклунда

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} + \varphi'(\xi) = e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} + \psi'(\eta) = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^{2v}$$

связывают уравнение (8) с уравнением

$$q_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} [q + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] (2 \ln[q + \varphi(\xi) + \psi(\eta)] + 1) (q_{\xi} + \varphi'(\xi)),$$

где  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi(\eta)$  – произвольные функции.

Аналогичным образом, начиная преобразования с детального анализа равенства (14), в каждом конкретном случае для оставшихся исследуемых уравнений (9) и (10) доказаны следующие утверждения.

**Утверждение 3.** Преобразования Бэклунда вида

$$w_{\xi\xi} = w_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi}, \quad w_{\xi\eta} = \frac{w_{\xi}}{2} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi}$$

связывают уравнение (9) с уравнением

$$(w^2)_{\xi\eta} = 4w_{\xi}^2.$$

**Утверждение 4.** Преобразования Бэклунда вида

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - e^v, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = e^{-v}$$

связывают уравнение (10) с уравнением

$$w_{\eta\xi} + w_{\xi} w_{\eta} = -1.$$

### Заключение

В работе доказаны теоремы о преобразованиях Бэклунда нелинейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка класса Клейна – Гордона, представляющие собой частные случаи уравнения Лиувилля с показательной нелинейностью, имеющей множитель, зависящий от функции и ее первых производных. Построение преобразований проведено с помощью метода Клэрэна. Полученные с помощью дифференциальных связей новые уравнения могут использоваться для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также для решения множества прикладных задач в различных областях естествознания.

### Библиографический список

1. Method for solving the Korteweg – de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Physical Review Letters. – 1967. – № 19. – P. 1095–1097.
2. The Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Method for exact solutions / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1974. – № 27. – P. 97–133.
3. **Hirota, R.** Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons / R. Hirota // Physical Review Letters. – 1971 – № 27. – P. 1192–1194.
4. **Ablowitz, M. J.** Solitons, nonlinear equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
5. **Барбашов, Б. М.** Преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля и калибровочные условия в теории релятивистской струны / Б. М. Барбашов, В. В. Несте-

- ренко // Теоретическая и математическая физика. – 1983. – Т. 56, № 2. – С. 180–191.
6. **Кривонос, С. О.** Суперполевые расширения уравнения Лиувилля : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.04.02 / Кривонос С. О. – Дубна, 1984. – 109 с.
  7. **Иванов, Е. А.** Преобразования Бэклунда для суперрасширений уравнения Лиувилля / Е. А. Иванов, С. О. Кривонос // Теоретическая и математическая физика. – 1986. – Т. 66, № 1. – С. 90–101.
  8. Inelastic interactions of the multiple-front waves for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation in fluid dynamics, plasma physics and electrodynamics / Z. Y. Sun, Y. T. Gao, X. Yu, X. H. Meng, Y. Liu // Wave Motion. – 2009. – Vol. 46, № 8. – P. 511–521
  9. **Veerakumar, V.** Modified Kadomtsev-Petviashvili (MKP) equation and electromagnetic soliton / V. Veerakumar, M. Daniel // Math. Comput. Simul. – 2003. – Vol. 62, № 1. – P. 163–169.
  10. **Song, J. F.** Backlund transformation and CRE solvability for the negative-order modified KdV equation / J. F. Song, Y. H. Hu, Z. Y. Ma // Nonlinear Dynamics. – 2017. – Vol. 90. – P. 575–580.
  11. **Захаров, В. Е.** Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, В. А. Кузнецов // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 11. – С. 1137–1168.
  12. **Гуленко, В. В.** Гамильтонова формулировка нелинейных динамических уравнений / В. В. Гуленко, В. В. Гушин // Доклады Академии наук Украины. – 1994. – № 3. – С. 73–77.
  13. **Cheng, J.** Miura and auto-Backlund transformations for the q-deformed KP and q-deformed modified KP hierarchies / J. Cheng // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 24, № 1. – P. 7–19.
  14. **Zabrodin, A. V.** Backlund transformations for the difference Hirota equation and the supersymmetric Bethe ansatz / A. V. Zabrodin // Theoretical and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 155, № 1. – P. 74–93.
  15. **Tsiganov, A. V.** Backlund transformations and divisor doubling / A. V. Tsiganov // Journal of Geometry and Physics. – 2018. – Vol. 126. – P. 148–158.
  16. **Редькина, Т. В.** Преобразования Бэклунда для системы уравнений в частных производных третьего порядка / Т. В. Редькина // Наука. Инновации. Технологии. – 2017. – № 4. – С. 23–42.
  17. Construction of Backlund transformations by the Clearance method for solving the generalized Liouville equation / R. G. Zakinyan, A. R. Zakinyan, T. V. Redkina, O. B. Surneva, O. S. Yanovskaya // Axioms. – 2019. – Vol. 8, № 45. – P. 1–17.
  18. **Закинян, Р. Г.** Преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений с гиперболической линейной частью / Р. Г. Закинян, Т. В. Редькина // Перспективные направления науки и техники : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (7–15 сентября 2012 г.). – Вып. 18. – Пшечмысль : Наука и студия, 2012. – С. 24–28.
  19. **Лэм, Д. Л.** Введение в теорию солитонов / Д. Л. Лэм. – Москва : Мир, 1983. – 294 с.
  20. **Погорелов, А. В.** Многомерное уравнение Монжа – Ампера / А. В. Погорелов. – Москва : Наука, 1988. – 96 с.
  21. **Сурнева, О. Б.** Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О. Б. Сурнева, О. С. Яновская // Наука. Инновации. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 37–52.

### References

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Physical Review Letters*. 1967, no. 19, pp. 1095–1097.

2. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1974, no. 27, pp. 97–133.
3. Hirota R. *Physical Review Letters*. 1971, no. 27, pp. 1192–1194.
4. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. *Solitons, nonlinear equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 516 p.
5. Barbashov B. M., Nesterenko V. V. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. [Theoretical and mathematical physics] 1983, vol. 56, no. 2, pp. 180–191. [In Russian]
6. Krivonos S. O. *Superpolevye rasshireniya uravneniya Liuvillya: dis. kand. fiz.-matem. nauk: 01.04.02* [Superfield extensions of the Liouville equation: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences: 01.04.02]. Dubna, 1984, 109. [In Russian]
7. Ivanov E. A., Krivonos S. O. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1986, vol. 66, no. 1, pp. 90–101. [In Russian]
8. Sun Z. Y., Gao Y. T., Yu X., Meng X. H., Liu Y. *Wave Motion*. 2009, vol. 46, no. 8, pp. 511–521
9. Veerakumar V., Daniel M. *Math. Comput. Simul.* 2003, vol. 62, no. 1, pp. 163–169.
10. Song J. F., Hu Y. H., Ma Z. Y. *Nonlinear Dynamics*. 2017, vol. 90, pp. 575–580.
11. Zakharov V. E., Kuznetsov V. A. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in physical sciences]. 1997, vol. 167, no. 11, pp. 1137–1168. [In Russian]
12. Gulenko V. V., Gushchin V. V. *Doklady Akademii nauk Ukrainy* [Reports of the Academy of Sciences of Ukraine]. 1994, no. 3, pp. 73–77. [In Russian]
13. Cheng J. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. 2017, vol. 24, no. 1, pp. 7–19.
14. Zabrodin A. V. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2008, vol. 155, no. 1, pp. 74–93.
15. Tsiganov A. V. *Journal of Geometry and Physics*. 2018, vol. 126, pp. 148–158.
16. Red'kina T. V. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovation. Technology]. 2017, no. 4, pp. 23–42. [In Russian]
17. Zakinyan R. G., Zakinyan A. R., Redkina T. V., Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Axioms*. 2019, vol. 8, no. 45, pp. 1–17.
18. Zakinyan R. G., Red'kina T. V. *Perspektivnye napravleniya nauki i tekhniki: materialy VIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (7–15 sentyabrya 2012 g.)* [Promising areas of science and technology: proceedings of the 8<sup>th</sup> International scientific and practical conference (7-15 of September, 2012)]. Issue 18. Pshemysl: Nauka i studiya, 2012, pp. 24–28. [In Russian]
19. Lem D. L. *Vvedenie v teoriyu solitonov* [Introduction to the theory of solitons]. Moscow: Mir, 1983, 294 p. [In Russian]
20. Pogorelov A. V. *Mnogomernoe uravnenie Monzha – Ampere* [Multidimensional Monge-Ampere equation]. Moscow: Nauka, 1988, 96 p. [In Russian]
21. Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovation. Technology]. 2018, no. 3, pp. 37–52. [In Russian]

---

**Редькина Татьяна Валентиновна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра прикладной математики  
и математического моделирования,  
Северо-Кавказский федеральный  
университет (Россия, г. Ставрополь,  
ул. Пушкина, 1)

E-mail: tvr59@mail.ru

**Red'kina Tat'jana Valentinovna**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of applied mathematics  
and mathematical modeling, North  
Caucasian Federal University (1 Pushkina  
street, Stavropol, Russia)

**Новикова Ольга Викторовна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра информационной  
безопасности автоматизированных  
систем, Северо-Кавказский федеральный  
университет (Россия, г. Ставрополь,  
ул. Пушкина, 1)

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

**Novikova Ol'ga Viktorovna**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of information security  
of automated systems, North Caucasian  
Federal University (1 Pushkina street,  
Stavropol, Russia)

**Образец цитирования:**

Редькина, Т. В. Преобразования Бэклунда для уравнений Лиувилля с показательной нелинейностью / Т. В. Редькина, О. В. Новикова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 39–53. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-4.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ БЭКЛУНДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Нахождение точных решений нелинейных уравнений в частных производных – одна из основных задач теории нелинейных систем. Для интегрируемых систем разработан ряд методов, но в силу сложности различных нелинейных уравнений не существует единого способа и приема их решения. Один из эффективных методов – применение дифференциальных связей Бэклунда для построения точных решений нелинейных уравнений. Преобразования Бэклунда дают возможность перейти к более простому уравнению, а применение дифференциальных связей – получить решение одного из уравнений, если решение другого известно. Кроме этого, данные преобразования играют важную роль в интегрируемых системах, так как выявляют внутренние связи между различными интегрируемыми свойствами. В последнее время в этой области было проведено множество исследований. Цель работы – получение решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка с помощью дифференциальных связей Бэклунда.

*Материалы и методы.* Рассматривается нахождение решений нелинейных дифференциальных уравнений с применением дифференциальных связей Бэклунда. Построение преобразований Бэклунда базируется на методе, предложенном Клэрэном, для уравнений второго порядка типа Монжа – Ампера.

*Результаты.* Для исследуемых в работе нелинейных гиперболических уравнений в частных производных получены точные решения с помощью дифференциальных связей Бэклунда; доказано получение решений одного из уравнений, если решение другого известно; проанализированы различные случаи получения решений данным методом.

*Выводы.* Результаты представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Найденные решения могут послужить основой для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также для решения прикладных задач в различных областях естествознания.

**Ключевые слова:** нелинейные уравнения в частных производных, гиперболические уравнения, преобразования Бэклунда, метод Клэрэна, дифференциальные связи, уравнение Лиувилля.

Т. В. Red'kina, O. V. Novikova

## APPLICATION OF BACKLUND DIFFERENTIAL CONSTRAINT FOR CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

**Abstract.**

*Background.* Finding exact solutions of nonlinear partial differential equations is one of the main problems of the nonlinear systems theory. A number of methods have been developed for integrable systems, but due to the complexity of various nonlinear equations, there is no single method and method for solving them. One of the effective methods is the use of Backlund differential constraints for constructing exact solutions of nonlinear equations. Backlund transformations make it possible to go to a simpler equation, and the use of differential constraints - to obtain a solution to one of the equations if the solution to the other is known. In addition, these transformations play an important role in integrable systems, since they reveal internal connections between various integrable properties. Recently, a lot of research has been done in this area. The aim of this work is to obtain solutions of nonlinear hyperbolic second-order partial differential equations using Bäcklund differential constraints.

*Materials and methods.* Finding solutions to nonlinear differential equations using Bäcklund differential constraints is considered. The construction of Bäcklund transformations is based on the method proposed by Claren for second-order equations of the Monge-Ampere type.

*Results.* For the nonlinear hyperbolic partial differential equations investigated in this work, exact solutions are obtained using Bäcklund differential constraints; the solution of one of the equations is proved if the solution of the other is known; various cases of obtaining solutions by this method are analyzed.

*Conclusions.* The results are of interest for studying nonlinear partial differential equations. The found solutions can serve as a basis for further research of equations of this type, as well as for solving applied problems in various fields of natural science.

**Keywords:** nonlinear partial differential equations, hyperbolic equations, Bäcklund transformations, Claren's method, differential constraints, Liouville's equation.

**Введение**

Нахождение точных решений нелинейных уравнений в частных производных – одна из основных задач раздела математики, посвященного анализу таких уравнений [1–4]. В силу сложности различных нелинейных уравнений не существует единого метода их решения. Для интегрируемых систем разработаны эффективные методы, такие как метод обратной задачи рассеяния [5, 6], метод Хироты [7], метод Пенлеве [8], преобразование Бэклунда [9–11], метод отображения и деформации [6], построение точных решений в виде бегущих волн [12, 13], нахождение автомодельных решений [12–14], применение дифференциальных связей Бэклунда [15–17] и др.

Изучение преобразований Бэклунда – одна из самых интересных тем в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Такие преобразования применяются для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений. Вместе с этим они представляют собой пример дифференциально-геометрической структуры, порожденной дифференциальными уравнениями. Преобразования Бэклунда дают возможность перейти к более простому уравнению, а применение дифференциальных связей – получить решение одного из уравнений, если решение другого известно. В настоящей статье найдены точные решения нелинейных гиперболических уравнений, полученных в работе [18], с использованием дифференциальных связей Бэклунда.

## 1. Материал и методика

Построение преобразований Бэклунда базируется на методе, предложенном Клэрэном [19], для уравнений второго порядка типа Монжа – Ампера [20].

Рассмотрим нелинейные гиперболические уравнения в частных производных [18]:

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} e^v [1 + 2v] v_{\xi} - v_{\xi} v_{\eta}, \quad (1)$$

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v [v_{\eta} - v_{\xi}], \quad (2)$$

Для рассматриваемых уравнений определены дифференциальные связи Бэклунда. Приведем некоторые из них для облегчения понимания дальнейших исследований.

**Утверждение 1** [18]. Преобразования Бэклунда

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1 + 2e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 4e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} v e^{2v} \quad (3)$$

связывают уравнение (1) с уравнением

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (w_{\xi} - 1)(w - \xi) \left( \frac{1}{2} + \ln \left[ \frac{1}{2} (w - \xi) \right] \right) - w_{\xi\eta} = 0. \quad (4)$$

**Утверждение 2** [18]. Для уравнения (1) существует автопреобразование Бэклунда вида

$$e^g \frac{\partial g}{\partial \xi} = e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad e^g \frac{\partial g}{\partial \eta} = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^{2v}. \quad (5)$$

**Утверждение 3** [18]. Преобразования Бэклунда вида

$$w_{\xi\xi} = w_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi}, \quad w_{\xi\eta} = \frac{w_{\xi}}{2} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi} \quad (6)$$

связывают уравнение (2) с уравнением

$$(w^2)_{\xi\eta} = 4w_{\xi}^2. \quad (7)$$

Опираясь на данные дифференциальные связи Бэклунда, найдем точные решения исследуемых уравнений.

## 2. Результаты

**Теорема 1.** Если уравнение (7) имеет решение

$$w = 2\eta + \xi, \quad (8)$$

то уравнение (2) имеет решение



$$v = -\ln \left( C - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} [\xi + \eta] \right), \quad C - \text{const.} \quad (9)$$

**Доказательство.** Воспользуемся найденными преобразованиями (6) и подставим известное решение (8), тогда система примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v,$$

откуда из системы находим

$$e^{-v} = C - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} [\xi + \eta],$$

где  $C$  – произвольная постоянная. В результате найдено решение (9) уравнения (2).

Выполним некоторые преобразования в уравнении (7). Умножим обе части на  $w^2$ :

$$w^2 (w^2)_{\xi\eta} - [(w^2)_{\xi}]^2 = 0,$$

сделаем замену функции  $w^2 = \omega$ , тогда можно легко найти решение полученного уравнения:

$$\omega \omega_{\xi\eta} - \omega_{\xi}^2 = 0;$$

$$\omega = P(\xi)Q(\eta), \quad P(\xi)Q(\eta)P'(\xi)Q'(\eta) = [P'(\xi)Q(\eta)]^2,$$

$$\frac{Q'(\eta)}{Q(\eta)} = \frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \lambda, \quad Q(\eta) = e^{\lambda\eta}, \quad P(\xi) = e^{\lambda\xi},$$

$$\omega = e^{\lambda[\eta+\xi]},$$

следовательно, уравнение (7) имеет решение вида

$$w = e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \lambda - \text{const.} \quad (10)$$

**Теорема 2.** Если уравнение (7) имеет решение (10), то уравнение (2) имеет решение

$$v = \ln \lambda + \lambda \left( \eta + \frac{1}{2} \xi \right) - \ln \left| 1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda[\eta+\frac{1}{2}\xi]} \right|. \quad (11)$$

**Доказательство.** Используя найденное преобразование (6), подставим известное решение (10):

$$w = e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad w_{\xi} = \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = w_{\eta}, \quad w_{\xi\xi} = \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = w_{\eta\xi},$$

тогда система примет вид

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v,$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = \frac{\lambda}{4} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \lambda = \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v, \quad (12)$$

откуда из первого линейного уравнения в частных производных находим связь между независимыми переменными  $\xi, \eta$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v, \quad \int \frac{\partial e^v}{\frac{\lambda}{2} e^v + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{2v}} = \xi + \varphi(\eta),$$

$$\int \frac{\partial e^v}{\frac{\lambda}{2} e^v + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{2v}} = \frac{2}{\lambda} \ln e^v - \frac{2}{\lambda} \ln \left[ \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \right] = \xi + \varphi(\eta),$$

$$\frac{e^v}{\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v} = e^{\frac{\lambda}{2}\eta} \psi(\xi), \quad e^v = \frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)}{2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)},$$

где  $\varphi(\eta)$  – произвольная функция, а из второго уравнения системы (12) определяем вид функции  $\varphi(\eta)$ :

$$\frac{e^v}{\lambda + \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v} = e^{\lambda\eta} \psi(\xi), \quad e^v = \frac{\lambda e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}{1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}.$$

Выполнив интегрирование и обратные преобразования, получим:

$$\frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)}{2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)} = \frac{\lambda e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}{1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi)},$$

$$e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta) \left( 1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi) \right) = e^{\lambda\eta} \psi(\xi) \left( 2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta) \right),$$

$$\varphi(\eta) = 2e^{\lambda\eta}, \quad \psi(\xi) = e^{\frac{\lambda}{2}\xi}.$$

В результате найдено решение (11) уравнения (2).

**Теорема 3.** Если уравнение (2) имеет решение

$$v = \alpha(\eta + \xi), \quad (13)$$

то уравнение (7) имеет решение

$$w = -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \exp \left[ -\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2} \eta \right]. \quad (14)$$

**Доказательство.** Воспользуемся преобразованиями Бэклунда (6) и подставим туда имеющееся значение (13), тогда получим систему уравнений

$$(\ln w_\xi)_\xi = \alpha - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}, \quad (\ln w_\xi)_\eta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)},$$

которую легко можно проинтегрировать по соответствующим переменным:

$$\ln w_\xi = \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \varphi(\eta), \quad \ln w_\xi = \frac{\alpha}{2} \eta - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \psi(\xi), \quad (15)$$

где  $\varphi(\eta)$ ,  $\psi(\xi)$  – постоянные интегрирования. Доопределим функции  $\varphi(\eta)$  и  $\psi(\xi)$  так, чтобы полученные значения правых частей системы (15) совпали:

$$\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \varphi(\eta) = \frac{\alpha}{2} \eta - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \psi(\xi).$$

Это возможно, если

$$\varphi(\eta) = \frac{\alpha}{2} \eta, \quad \psi(\xi) = \alpha\xi.$$

В результате определилось значение

$$w_\xi = e^{\alpha \left[ \xi + \frac{1}{2} \eta \right] - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}}.$$

Выполним интегрирование и получим неизвестную функцию  $w(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} w &= \int e^{\alpha \left[ \xi + \frac{1}{2} \eta \right] + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}} d\xi = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \frac{1}{2} \eta} \int e^{-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}} d e^{\alpha[\xi+\eta]} = \\ &= -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} e^{-\alpha \frac{1}{2} \eta} \frac{-\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \varphi(\eta), \end{aligned}$$

где  $\varphi(\eta)$  – произвольная функция.

Полученная функция содержит неизвестную функцию

$$w = -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \exp \left[ -\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2} \eta \right] + \varphi(\eta),$$

которую необходимо доопределить. Для уточнения  $\varphi(\eta)$  выполним подстановку найденной функции в уравнение (7). Определим  $w_\xi^2(\xi, \eta)$  и  $(w^2)_{\xi\eta}$ :

$$\begin{aligned}
 w^2 &= \left( \frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \right)^2 \exp \left[ -\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \alpha\eta \right] - \\
 &- \frac{32\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \varphi(\eta) \exp \left[ -\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \varphi^2(\eta), \\
 (w^2)_{\xi\eta} &= 4 \exp \left[ \alpha(\eta+2\xi) - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} \right] + \\
 &+ 2\varphi'(\eta) \exp \left[ \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \\
 &+ \varphi(\eta) \left[ -\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha \right] \exp \left[ \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right]; \\
 w_{\xi} &= \exp \left[ \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right], \quad w_{\xi}^2 = \exp \left[ 2\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha\eta \right].
 \end{aligned}$$

Равенство (7) будет выполняться тождественно, если

$$\begin{aligned}
 &2\varphi'(\eta) \exp \left[ \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \\
 &+ \varphi(\eta) \left[ -\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha \right] \exp \left[ \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] = 0; \\
 &2\varphi'(\eta) + \varphi(\eta) \left[ \alpha - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение на функцию  $\varphi(\eta)$  зависит от переменной  $\xi$ , чего быть не должно, следовательно, необходимо положить  $\varphi(\eta) = 0$ . В результате исконая функция имеет вид (14).

Теорема доказана.

Зная некоторые частные решения уравнения (1), найдем и решения (4).

**Теорема 4.** Уравнение (4) имеет решение, заданное неявно в виде ряда

$$\ln \left| \ln \left[ \frac{1}{2}(w-\xi) \right] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \ln^n \left[ \frac{1}{2}(w-\xi) \right] = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma\xi + \eta) + C_2,$$

где постоянная  $\gamma, C_2$  – произвольные постоянные.

**Теорема 5.** Если уравнение (1) имеет решение  $v = a$ , то уравнение (4) имеет решение

$$w = \xi - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}\eta. \quad (16)$$

**Доказательство.** Подставляем  $v = a$  в найденные дифференциальные связи (3) и выполняем интегрирование каждого равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1, \quad w = \xi + \varphi(\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}, \quad w = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}\eta + \psi(\xi).$$

Приравниваем полученные выражения для  $w$  и доопределяем произвольные функции  $\varphi(\eta)$ ,  $\psi(\xi)$ . В результате получаем решение (16).

**Теорема 6.** Если уравнение (1) имеет решение  $v = \eta$ , то уравнение (4) имеет решение

$$w = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}} [2\eta - 1]e^{2\eta} + \xi. \quad (17)$$

**Доказательство.** Подставляем  $v = \eta$  в найденные дифференциальные связи (3) и выполняем интегрирование каждого равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1, \quad w = \xi + \varphi(\eta),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} \eta e^{2\eta}, \quad w = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}} [2\eta - 1]e^{2\eta} + \psi(\xi).$$

Приравниваем полученные выражения для  $w$  и доопределяем произвольные функции  $\varphi(\eta)$ ,  $\psi(\xi)$ . В результате получаем равенство (17).

Воспользуемся найденными автопреобразованиями Бэклунда (5) для уравнения (1) и уже ранее построенным его решением (12).

Если будем считать, что

$$\ln|g| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n \cdot n!} + C_2 = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma\xi + \eta), \quad (18)$$

то с помощью автопреобразований (5) можно найти новое решение уравнения (1). Подставим (18) в левую часть (5), для этого продифференцируем (18) по  $\xi$  и  $\eta$ , имеем:

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma \frac{1}{\frac{1}{g} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n g^{n-1}}{n!}} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma g e^{-g}, \quad \frac{dg}{d\eta} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g e^{-g},$$

тогда на функцию  $v(\xi, \eta)$  получим систему

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g = \frac{1}{\gamma} e^v \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^{2v}.$$

Приравнивая левые части, получим линейное уравнение первого порядка:

$$2 \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} v e^v. \quad (19)$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения, надо найти первые интегралы системы

$$\frac{d\eta}{2} = -\gamma \frac{d\xi}{1} = \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \frac{dv}{ve^v},$$

$$2\gamma\xi + \eta = C_1, \quad \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[ \ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] + \xi = C_2. \quad (20)$$

Общее решение (19) имеет вид

$$F \left( 2\gamma\xi + \eta, \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[ \ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] + \xi \right) = C, \quad (21)$$

где  $F$  – произвольная функция.

Произвольная функция  $F$  (21) удовлетворяет линейному уравнению, но (1) – нелинейно, поэтому следует уточнить вид функции  $F$ .

Выполним подстановку (20) в (1). Найдем производные  $v_\xi, v_\eta, v_{\eta\xi}$ :

$$2\gamma F_1 + \left( 1 + \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} v_\xi \left[ \frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{v^{n-1}}{n!} \right] \right) F_2 = 0,$$

$$F_1 + F_2 \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} v_\eta \left[ \frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{v^{n-1}}{n!} \right] = 0$$

(здесь  $F_1$  – производная от  $F$  по первой компоненте, а  $F_2$  – производная от  $F$  по второй компоненте), откуда получаем

$$v_\xi = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left( 2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right) v e^v, \quad v_\eta = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} v e^v. \quad (22)$$

Продифференцируем первое равенство (22) по переменной  $\eta$  и найдем смешанную производную:

$$v_{\eta\xi} = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left( 2\gamma \frac{F_{11}}{F_2} - 2\gamma \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} + \left( \frac{F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} F_{22} \right) \left[ \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \frac{e^{-v}}{v} v_\xi + 1 \right] \right) v e^v -$$

$$-\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} (1+v) e^v v_\xi = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left( \frac{2\gamma F_{11} + F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} [2\gamma F_{12} + F_{22}] \right) v e^v -$$

$$-\left(\frac{F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} F_{22}\right) v_\xi - \frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} e^v (1+v) v_\xi = 2\gamma \frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \times$$

$$\times \left[ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} \right] v e^v + \left( \frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \right)^2 \frac{F_1}{F_2} v e^{2v} (1+v) \left( 2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right).$$

Подставим найденные значения в (1) и сократим на значения, отличные от нуля:

$$\frac{16 \alpha_{11}}{\alpha_{32} \alpha_{21}} \left[ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} \right] = - \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{F_1}{F_2} \right) \left( 2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right) e^v (1+2v). \quad (23)$$

Как видно, равенство (23) тождественно не выполняется, поэтому надо потребовать, чтобы выполнялась одна из систем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} + \frac{F_1}{F_2} = 0, \\ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{F_1}{F_2} = -\frac{1}{2\gamma}, \\ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Все члены равенств являются однородными, поэтому воспользуемся приемом, позволяющим разделить аргументы функции, представим  $F$  в виде

$$F = X(C_1)Y(C_2),$$

где  $X$  зависит от первой компоненты  $C_1$  функции  $F$ , а  $Y$  – от второй компоненты  $C_2$  (20), тогда первое равенство системы (24) примет вид (в силу аналогичности первых равенств систем результат подстановки для второй системы будет записываться в скобках):

$$X'Y = -\frac{1}{\gamma} XY', \quad \left( X'Y = -\frac{1}{2\gamma} XY' \right), \quad \text{или} \quad \frac{X'}{X} = -\frac{1}{\gamma} \frac{Y'}{Y} = \lambda, \quad \left( \frac{X'}{X} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{Y'}{Y} = \lambda \right),$$

где  $\lambda$  – произвольный параметр. Функции примут вид

$$\ln|X| = \lambda C_1, \quad \ln|Y| = -\gamma \lambda C_2 \quad (\ln|X| = \lambda C_1, \quad \ln|Y| = -2\gamma \lambda C_2),$$

что приводит к следующему виду функции  $F(C_1, C_2)$ :

$$F(C_1, C_2) = e^{\lambda C_1 - \gamma \lambda C_2}, \quad \left( F(C_1, C_2) = e^{\lambda C_1 - 2\gamma \lambda C_2} \right), \quad (25)$$

где

$$\lambda [C_1 - \gamma C_2] = \lambda \left[ \gamma \xi + \eta - \frac{8 \alpha_{11}}{\alpha_{32} \alpha_{21}} \left[ \ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right],$$

$$\left( \lambda[C_1 - 2\gamma C_2] = \lambda\eta - \lambda \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[ \ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right).$$

Связь между компонентами  $C_1, C_2$ , удовлетворяющая второй системе (выражение в скобках), привела к отсутствию зависимости от переменной  $\xi$ , поэтому этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Осталось проверить выполнение второго равенства системы; подставим (25) в (24):

$$-2 \frac{\lambda^3 \gamma}{(-\gamma \lambda)^2} - \frac{\lambda^2}{(-\gamma \lambda)^3} (-\gamma \lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{-\gamma \lambda} = -2 \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0.$$

Условие выполняется тождественно, следовательно, вид функции (21)–(25). Зависимость от  $\lambda$  не существенная, поэтому положим  $\lambda = 1$ . Доказана следующая

**Теорема 7.** Уравнение (1) имеет решение

$$\exp \left( \gamma \xi + \eta - \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[ \ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right) = C. \quad (26)$$

### Заключение

В работе получены точные решения нелинейных гиперболических уравнений в частных производных с помощью дифференциальных связей Бэклунда; доказано получение решений одного из уравнений, если решение другого известно; проанализированы различные случаи получения решений данным методом. В частности, для рассматриваемых уравнений и связанных с ними преобразованиями Бэклунда получены решения, заданные неявно в виде ряда, и решения, содержащие логарифмические и экспоненциальные функции.

Результаты могут использоваться для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также для решения прикладных задач в различных областях естествознания.

### Библиографический список

1. Ремизов, И. Д. Решение уравнения Шредингера с помощью оператора сдвига / И. Д. Ремизов // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 3. – С. 477–480.
2. Смирнов, А. О. Решение нелинейного уравнения Шредингера в виде двухфазных странных волн / А. О. Смирнов // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 173, № 1. – С. 89–103.
3. Демонтис, Ф. Точные решения модифицированного уравнения Кортевега де-Фриза / Ф. Демонтис // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 168, № 1. – С. 35–48.
4. Царев, С. П. Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными / С. П. Царев // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – Т. 122, № 1. – С. 144–160.
5. Method for solving the Korteweg – de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Physical Review Letters. – 1967, № 19. – P. 1095–1097.



6. The Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Method for exact solutions / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1974. – № 27. – P. 97–133.
7. **Hirota, R.** Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons / R. Hirota // Physical Review Letters. – 1971. – № 27. – P. 1192–1194.
8. **Ablowitz, M. J.** Solitons, nonlinear equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
9. **Барбашов, Б. М.** Преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля и калибровочные условия в теории релятивистской струны / Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко // Теоретическая и математическая физика. – 1983. – Т. 56, № 2. – С. 180–191.
10. **Кривонос, С. О.** Суперполевые расширения уравнения Лиувилля : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.04.02 / Кривонос С. О. – Дубна, 1984. – 109 с.
11. **Иванов, Е. А.** Преобразования Бэклунда для суперрасширений уравнения Лиувилля / Е. А. Иванов, С. О. Кривонос // Теоретическая и математическая физика. – 1986. – Т. 66, № 1. – С. 90–101.
12. **Полянин, А. Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – Москва : Физматлит, 2005. – 256 с.
13. **Тарасевич, Ю. Ю.** Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : метод. рекомендации / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.
14. **Калоджеро, Ф.** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – Москва : Мир, 1985. – 472 с.
15. **Редькина, Т. В.** Преобразования Бэклунда для системы уравнений в частных производных третьего порядка / Т. В. Редькина // Наука. Инновации. Технологии. – 2017. – № 4. – С. 23–42.
16. Construction of Backlund transformations by the Clearance method for solving the generalized Liouville equation / R. G. Zakinyan, A. R. Zakinyan, T. V. Redkina, O. B. Surneva, O. S. Yanovskaya // Axioms. – 2019. – Vol. 8, № 45. – P. 1–17.
17. **Закинян, Р. Г.** Преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений с гиперболической линейной частью / Р. Г. Закинян, Т. В. Редькина // Перспективные направления науки и техники : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (7–15 сентября 2012 г.). – Вып. 18. – Пшемысль : Наука и студия, 2012. – С. 24–28.
18. **Сурнева, О. Б.** Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О. Б. Сурнева, О. С. Яновская // Наука. Инновации. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 37–52.
19. **Лэм, Д. Л.** Введение в теорию солитонов / Д. Л. Лэм. – Москва : Мир, 1983. – 294 с.
20. **Погорелов, А. В.** Многомерное уравнение Монжа – Ампера / А. В. Погорелов. – Москва : Наука, 1988. – 96 с.

### References

1. Remizov I. D. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2016, vol. 100, no. 3, pp. 477–480. [In Russian]
2. Smirnov A. O. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2012, vol. 173, no. 1, pp. 89–103. [In Russian]
3. Demontis F. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2011, vol. 168, no. 1, pp. 35–48. [In Russian]

4. Tsarev S. P. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2000, vol. 122, no. 1, pp. 144–160. [In Russian]
5. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Physical Review Letters*. 1967, no. 19, pp. 1095–1097.
6. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1974, no. 27, pp. 97–133.
7. Hirota R. *Physical Review Letters*. 1971, no. 27, pp. 1192–1194.
8. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. *Solitons, nonlinear equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 516 p.
9. Barbashov B. M., Nesterenko V. V. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1983, vol. 56, no. 2, pp. 180–191. [In Russian]
10. Krivonos S. O. *Superpoleyve rasshireniya uravneniya Liuvillya: dis. kand. fiz.-matem. nauk: 01.04.02* [Superfield extensions of the Liouville equation: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences 01.04.02]. Dubna, 1984, 109 p. [In Russian]
11. Ivanov E. A., Krivonos S. O. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1986, vol. 66, no. 1, pp. 90–101. [In Russian]
12. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p. [In Russian]
13. Tarasevich Yu. Yu. *Nakhozhdenie i vizualizatsiya avtomodel'nykh resheniy differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh sredstvami Maple: metod. rekomendatsii* [Finding and visualizing self-similar solutions of partial differential equations by means of Maple: methodological recommendations]. Astrakhan, 2010, 23 p. [In Russian]
14. Kalodzhero F., Degasperis A. *Spektral'nye preobrazovaniya i solitony. Metody resheniya i issledovaniya evolyutsionnykh uravneniy* [Spectral transformations and solitons. Methods for solving and researching evolutionary equations]. Moscow: Mir, 1985, 472 p. [In Russian]
15. Red'kina T. V. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies]. 2017, no. 4, pp. 23–42. [In Russian]
16. Zakinyan R. G., Zakinyan A. R., Redkina T. V., Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Axioms*. 2019, vol. 8, no. 45, pp. 1–17.
17. Zakinyan R. G., Red'kina T. V. *Perspektivnye napravleniya nauki i tekhniki: materialy VIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (7–15 sentyabrya 2012 g.)* [Promising areas of science and technology: proceedings of the 8<sup>th</sup> International scientific and practical conference (7-15 September, 2012)]. Issue 18. Pshemysl: Nauka i studiya, 2012, pp. 24–28. [In Russian]
18. Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies]. 2018, no. 3, pp. 37–52. [In Russian]
19. Lem D. L. *Vvedenie v teoriyu solitonov* [Introduction to the theory of solitons]. Moscow: Mir, 1983, 294 p. [In Russian]
20. Pogorelov A. V. *Mnogomernoe uravnenie Monzha – Ampera* [Multidimensional Monge-Ampere equation]. Moscow: Nauka, 1988, 96 p. [In Russian]

---

**Редькина Татьяна Валентиновна**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра прикладной математики  
и математического моделирования,  
Северо-Кавказский федеральный  
университет (Россия, г. Ставрополь,  
ул. Пушкина, 1)

E-mail: tvr59@mail.ru

---

**Red'kina Tat'jana Valentinovna**  
Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of applied mathematics  
and mathematical modeling, North  
Caucasian Federal University  
(1 Pushkina street, Stavropol, Russia)

**Новикова Ольга Викторовна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра информационной  
безопасности автоматизированных  
систем, Северо-Кавказский федеральный  
университет (Россия, г. Ставрополь,  
ул. Пушкина, 1)

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

**Novikova Ol'ga Viktorovna**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of information security  
of automated systems, North Caucasian  
Federal University (1 Pushkina street,  
Stavropol, Penza)

**Образец цитирования:**

Редькина, Т. В. Применение дифференциальных связей Бэклунда для построения точных решений нелинейных гиперболических уравнений / Т. В. Редькина, О. В. Новикова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 54–67. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-5.

## ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Теория решения обратных задач математической физики является одним из наиболее активно развивающихся разделов современной математики. Интерес исследователей к таким задачам обусловлен в первую очередь большим количеством их приложений, появившихся в последние годы в связи с бурным развитием физики и техники. Несмотря на большое количество методов решения обратных задач, в настоящее время по-прежнему велика потребность в дальнейшей разработке новых методов решения, учитывающих некорректность ряда обратных задач. В данной работе предлагаются численные методы решения одного класса обратных задач, а именно задач восстановления начальных условий для уравнений параболического и гиперболического типов.

*Материалы и методы.* Методика построения численных методов решения задач восстановления начальных условий для линейных параболических и гиперболических уравнений заключается в следующем. По известным формулам обобщенного решения линейных параболических и гиперболических уравнений выполняется переход к эквивалентным исходным задачам линейным интегральным уравнениям первого рода, которые затем решаются приближенно при помощи непрерывного операторного метода. Для этого составляется и решается вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений, которая затем решается численным методом Эйлера. При этом на численных примерах показывается, что за счет подходящего числа шагов метода Эйлера может быть достигнута (в случае необходимости) регуляризация решения задачи. Сходимость метода обосновывается в терминах теории устойчивости решения дифференциальных уравнений.

*Результаты.* Построены численные методы приближенного решения задачи о восстановлении начального условия для линейных параболических и гиперболических уравнений. Авторам удалось успешно применить непрерывный операторный метод к решению вышеупомянутой задачи. Решение ряда модельных примеров показало эффективность предложенных результатов.

*Выводы.* Предложены эффективные численные методы решения одного класса обратных задач математической физики, а именно задачи восстановления начального условия в задачах Коши для линейных уравнений параболического и гиперболического типов. На численных примерах показано, что непрерывный операторный метод с успехом может быть применен к решению указанных типов обратных задач математической физики.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, гиперболические уравнения, обратные задачи, начальное условие, регуляризация.

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

## NUMERICAL RECOVERY OF THE INITIAL CONDITION IN THE CAUCHY PROBLEMS FOR LINEAR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS

### Abstract.

*Background.* The theory of solving inverse problems of mathematical physics is one of the most actively developing branches of modern mathematics. The interest of researchers in such problems is primarily due to the large number of their applications that have appeared in recent years in connection with the rapid development of physics and technology. Despite the large number of methods for solving inverse problems, at present, there is still a great need for the further development of new methods of solving that take into account the incorrectness of a number of inverse problems. In this paper, we propose numerical methods for solving one class of inverse problems, namely, problems of recovering the initial conditions for equations of parabolic and hyperbolic types.

*Materials and methods.* The technique for constructing numerical methods for solving problems of recovering initial conditions for linear parabolic and hyperbolic equations is as follows. According to the well-known formulas for the generalized solution of linear parabolic and hyperbolic equations, a transition is made to the equivalent initial problems of linear integral equations of the first kind, which are then solved approximately using the continuous operator method. For this, an auxiliary system of linear differential equations is compiled and solved, which is then solved by the numerical Euler method. At the same time, numerical examples show that due to a suitable number of steps of the Euler method, a regularization of the solution of the problem can be achieved (if necessary). The convergence of the method is substantiated in terms of the stability theory of the solution of differential equations.

*Results.* Numerical methods are developed for the approximate solution of the problem of recovering the initial condition for linear parabolic and hyperbolic equations. The authors have successfully applied the continuous operator method to the solution of the above problem. The solution of a number of model examples showed the effectiveness of the proposed results.

*Conclusions.* Effective numerical methods are proposed for solving one class of inverse problems of mathematical physics, namely, the problem of recovering the initial condition in Cauchy problems for linear equations of hyperbolic and parabolic types. Numerical examples show that the continuous operator method can be successfully applied to the solution of the indicated types of inverse problems of mathematical physics.

**Keywords:** parabolic equations, hyperbolic equations, inverse problems, initial condition, regularization.

### Введение

История решения обратных задач математической физики насчитывает уже более века. Исследования в этом направлении особенно активизировались с появлением и развитием современной вычислительной техники, значительно расширившей спектр применяемых к решению таких задач вычислительных алгоритмов. В настоящее время число приложений обратных задач математической физики продолжает увеличиваться, благодаря чему разра-

ботка эффективных численных методов решения таких задач становится все более и более актуальной.

В данной статье рассматривается один класс обратных задач математической физики, известных как ретроспективные обратные задачи. Их суть заключается в восстановлении одного или нескольких начальных условий задачи по известным значениям решения в некоторый момент времени.

Задача с обратным временем для параболических уравнений имеет большое число приложений, в числе которых, например, исследование процессов теплообмена, а также решение различных задач идентификации. Список работ, в которых изучались свойства этой задачи и строились численные методы, весьма обширен; среди них следует в первую очередь назвать монографии [1–9], в которых содержится обширная библиография. Среди всего многообразия методов, используемых для решения ретроспективной обратной задачи, особое место занимают итерационные методы, в том числе градиентные методы. Отметим здесь, например, книгу [9], а также статью [10], в которой, помимо краткого обзора результатов в области решения ретроспективных обратных задач для уравнения теплопроводности, упомянуто, что при использовании итерационных методов в качестве параметра регуляризации может рассматриваться число итераций, согласуемое с погрешностью входных данных. Отметим также, что в целом ряде работ (см., напр., [11–14]) подчеркивается важность и эффективность итерационных (в частности градиентных) методов решения задачи восстановления начального условия для уравнений гиперболического типа.

Настоящая статья посвящена построению численных методов решения следующих проблем.

1. Проблема восстановления начального условия в задаче Коши для линейного параболического дифференциального уравнения.

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \Phi(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Требуется восстановить неизвестную функцию  $\varphi(x)$ , если, помимо константы  $\gamma > 0$  и функции  $\Phi(t, x)$ , дополнительно известной является функция  $u(T, x)$ .

2. Проблема восстановления начального условия в задаче Коши для линейного гиперболического уравнения.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (5)$$

Решаются следующие задачи:

– требуется восстановить неизвестную функцию  $\varphi(x)$  в предположении о том, что, помимо константы  $a$  и функций  $\psi(x)$  и  $\Phi(t, x)$ , дополнительно известной является функция  $u(T, x)$ ;

– требуется восстановить неизвестную функцию  $\psi(x)$  в предположении о том, что, помимо константы  $a$  и функций  $\varphi(x)$  и  $\Phi(t, x)$ , дополнительно известной является функция  $u(T, x)$ .

Перечисленные задачи успешно решены в рамках данной работы. При построении численных методов широко использовался непрерывный операторный метод, ранее предложенный в статье [15]. Решение модельных примеров продемонстрировало эффективность предложенных методов.

Данная статья продолжает цикл статей [16–19], посвященных применению непрерывного операторного метода к решению различных задач математической физики.

### 1. Восстановление начального условия для параболического уравнения

Построим численный метод восстановления функции  $\varphi(x)$  в задаче (1)–(2) в предположении о том, что известной является функция  $u(T, x)$ .

Известно [20], что точное решение задачи Коши (1)–(2) дается следующей интегральной формулой:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) G(x, \xi, t-s) d\xi ds, \quad (6)$$

где  $G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\gamma t}\right]$ .

Предположим, что функция  $\varphi(x)$  принадлежит пространству  $L_2(\mathbb{R})$  функций, суммируемых в квадрате на вещественной оси.

Обозначим  $x_j = -A + jh$ , где  $j = \overline{0, N}$ ,  $h = 2A/N$ ,  $A$  – достаточно большое вещественное положительное число;  $N$  – достаточно большое целое положительное число. Пусть также  $u(T, x_j) = \chi_j$ . Примем в уравнении (6)  $t = T$  и  $x = x_j$ , в результате чего получим:

$$\chi_j = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_j, \xi, T) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) G(x_j, \xi, T-s) d\xi ds. \quad (7)$$

Обозначим как  $f_j$  аппроксимацию интеграла

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) G(x_j, \xi, T-s) d\xi ds$$





$$\bar{\varphi}_0(0) = v_0, \bar{\varphi}_1(0) = v_1, \dots, \bar{\varphi}_N(0) = v_N, \quad (10)$$

где значения  $v_0, \dots, v_N$  могут быть зафиксированы произвольным образом.

Задача (9)–(10) может быть решена любым приближенным методом решения дифференциальных уравнений. В частности, одним из наиболее простых и вместе с тем эффективных является метод Эйлера. Пусть  $\theta$  – шаг метода Эйлера, а  $L$  – число итераций метода Эйлера. Тогда метод Эйлера приближенного решения задачи (9)–(10) определяется последовательными ( $r = \overline{1, L}$ ) вычислениями по следующей цепочке формул:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi}_{0,r+1} = \bar{\varphi}_{0,r} + \mu_0 \left( \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [G(x_0, \xi_k, T) \bar{\varphi}_{k,r} + G(x_0, \xi_{k+1}, T) \bar{\varphi}_{k+1,r}] + \right. \\ \quad \left. + f_0 - \Psi_0 \right), \\ \bar{\varphi}_{1,r+1} = \bar{\varphi}_{1,r} + \mu_1 \left( \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [G(x_1, \xi_k, T) \bar{\varphi}_{k,r} + G(x_1, \xi_{k+1}, T) \bar{\varphi}_{k+1,r}] + \right. \\ \quad \left. + f_1 - \Psi_1 \right), \\ \dots \\ \bar{\varphi}_{N,r+1} = \bar{\varphi}_{N,r} + \mu_N \left( \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [G(x_N, \xi_k, T) \bar{\varphi}_{k,r} + G(x_N, \xi_{k+1}, T) \bar{\varphi}_{k+1,r}] + \right. \\ \quad \left. + f_N - \Psi_N \right), \end{array} \right. \quad (11)$$

где

$$\bar{\varphi}_{j,r} = \bar{\varphi}_j(\sigma_r), \quad \sigma_r = r\theta, \quad \bar{\varphi}_{j,0} = v_j.$$

**Замечание 2.** Константы  $\mu_j$  выбраны по формуле (9).

Результат решения задачи фиксируется приближенными равенствами  $\varphi_j \approx \bar{\varphi}_{j,L}$ .

**Модельный пример 1.** Пусть требуется восстановить начальное условие задачи Коши (1)–(2), где  $\gamma=1$ ,  $\Phi(t, x) \equiv 0$ , если дополнительно известной является функция  $u(1, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right]$ .

**Замечание 3.** Точное решение поставленной задачи определяется формулой  $\varphi(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]$  при точном решении задачи (1)–(2)

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right].$$

При численных расчетах были зафиксированы следующие значения параметров метода:  $A = 5$ ,  $N = 100$ ,  $\theta = 0,1$ .

Результат восстановления функции  $\varphi(x)$  показан на рис. 1 и 2. График на рис. 1 соответствует случаю  $L=100$ , в то время как график на рис. 2 соответствует случаю  $L=500$ . На обоих графиках по оси абсцисс отложены значения независимого аргумента, в то время как по оси ординат отложены значения точного (сплошная линия) и приближенного (пунктирная линия) решения поставленной задачи – функции  $\varphi(x)$ .

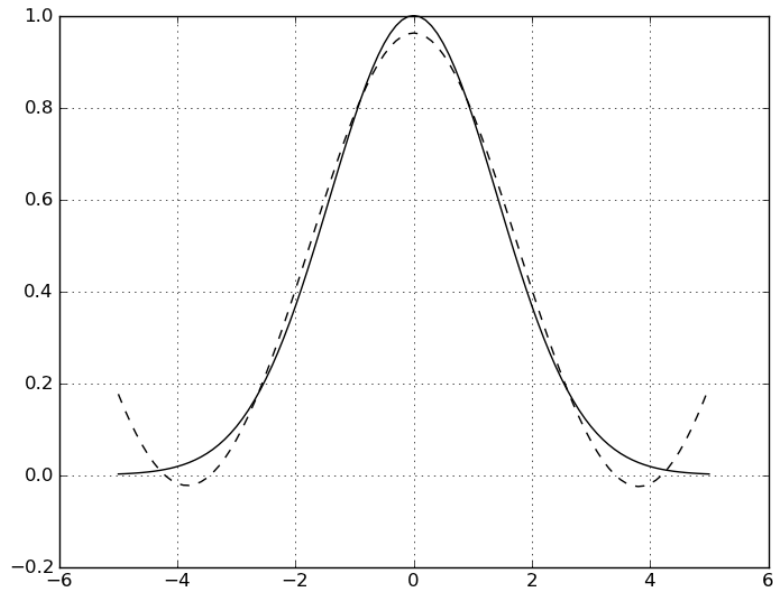


Рис. 1. Решение модельного примера 1 ( $L=100$ )

**Модельный пример 2.** Решим задачу восстановления функции  $\varphi(x)$  в задаче (1)–(2), если  $\gamma=2$ :

$$\Phi(t, x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{(t+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{3}} \left( 16t^2x + 32tx^2 + 16x^3 - 4tx - 4x^2 - 16t - 23x + 4 \right),$$

и дополнительно известной является функция

$$u(1, x) = xe^{-\frac{(1+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{3}}.$$

**Замечание 4.** Точное решение поставленной задачи дается функциями

$$u(t, x) = xe^{-\frac{(t+x)^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{3}}, \quad \varphi(x) = xe^{-\frac{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{3}}.$$

При расчетах были зафиксированы следующие параметры метода:

$$A=10, \quad N=200, \quad M=20, \quad L=10^3, \quad \theta=0,01.$$

Для вычисления интегралов  $f_j$  ( $j=\overline{0, N}$ ) был использован многомерный аналог квадратурной формулы трапеций. Результат решения поставленной задачи проиллюстрирован на рис. 3.

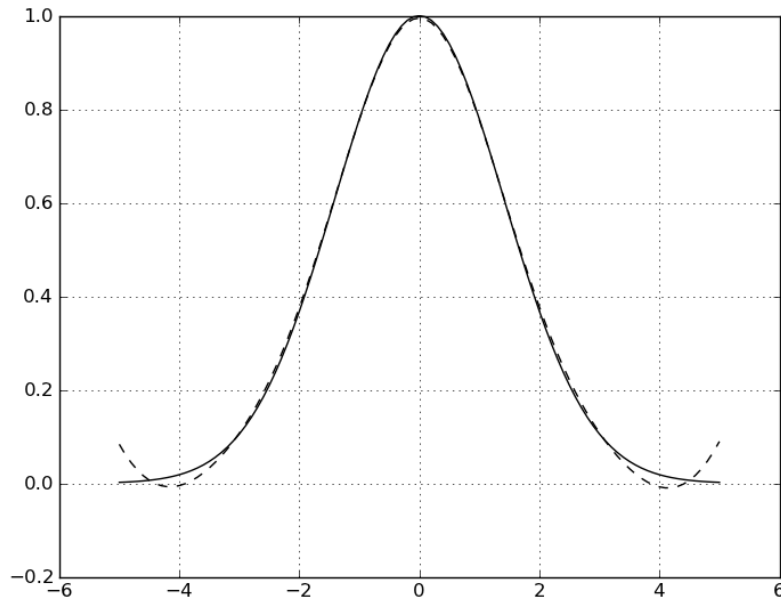
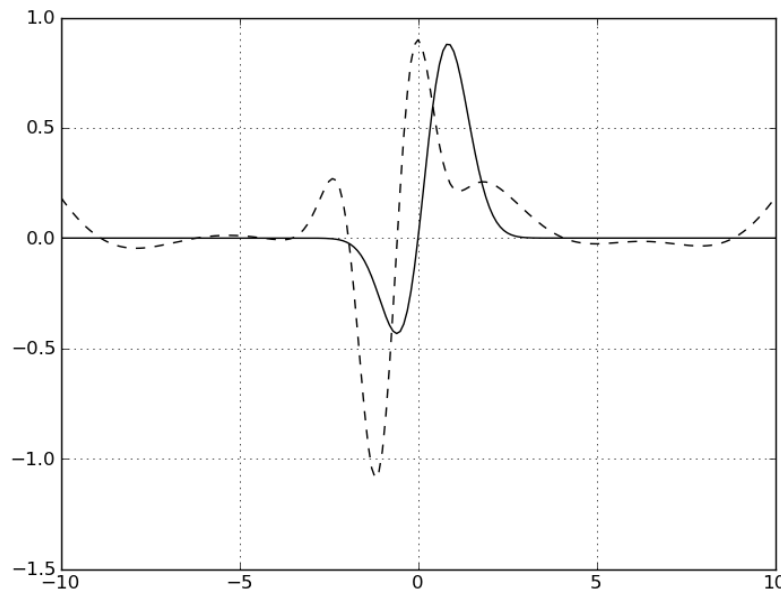
Рис. 2. Решение модельного примера 1 ( $L = 500$ )

Рис. 3. Решение модельного примера 2

## 2. Восстановление начального условия для гиперболического уравнения

Перейдем к рассмотрению проблемы восстановления одного из граничных условий в задаче Коши (3)–(5) для одномерного линейного гиперболического уравнения.

Пусть сначала известной является функция  $\psi(x)$ ; тогда поставим задачу об отыскании функции  $\varphi(x)$  в предположении о том, что дополнительно известной является функция  $u(T, x)$ .

Известно [20], что общее решение задачи (3)-(5) дается интегральной формулой

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \Phi(s, \xi) d\xi ds. \quad (12)$$

Обозначим как  $\chi(t)$  первообразную функции  $\psi(\xi)$  так, что

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \chi(x + at) - \chi(x - at).$$

Кроме того, определим  $f(x)$  как функцию, аппроксимирующую (например, с помощью одной из известных кубатурных формул) в точке  $\eta = x$  выражение

$$2u(T, \eta) - \frac{1}{a} \int_0^{t^*} \int_{\eta-a(T-s)}^{\eta+a(T-s)} \Phi(s, \xi) d\xi ds.$$

Обозначим как  $A$  достаточно большое вещественное положительное число. Введем на  $x \in [-A, A]$  равномерную сетку из узлов  $x_j = -A + jh$  с шагом  $h = 2A/N$ , где  $N$  – достаточно большое положительное число. С целью упрощения предположим дополнительно, что существует такое целое положительное число  $M$ , что для  $T$  справедливо равенство  $T = M\tau$ , где  $\tau = h/a$ .

Пусть  $t_i = i\tau$ ; тогда  $T = t_M$ . Легко видеть, что в этом случае значения  $x_j \pm at_i$  будут совпадать с одним из узлов сетки; другими словами, для каждой упорядоченной пары  $(i, j)$  справедлива формула

$$x_j \pm at_i = x_{j \pm i}. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$u_j = u(T, x_j), \quad \varphi_j = \varphi(x_j), \quad \chi_j = \chi(x_j), \quad f_j = f(x_j).$$

Приняв в уравнении (12)  $t = t_i$  и  $x = x_j$ , получим

$$u(t_i, x_j) = \frac{1}{2} [\varphi(x_j - at_i) + \varphi(x_j + at_i)] + \frac{1}{2a} \int_{x_j-at_i}^{x_j+at_i} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{t_i} \int_{x_j-a(t_i-s)}^{x_j+a(t_i-s)} \Phi(s, \xi) d\xi ds, \quad (14)$$

С учетом соотношения (13) уравнение (14) может быть переписано в виде системы из следующих линейных алгебраических уравнений:

$$\Phi_{j-M} + \Phi_{j+M} + \chi_{j+M} - \chi_{j-M} = f_j, \quad (15)$$

где  $j = \overline{0, N}$ .

Система из уравнений (15) служит основой для построения численных методов решения задач, поставленных в разд. 1.

Рассмотрим сначала более простую задачу о восстановлении функции  $\varphi(x)$  при известной функции  $\psi(x)$ . В этом случае значения  $\chi_{j\pm M}$  при  $\overline{0, N}$  можно считать известными, поскольку тогда они в общем случае могут быть вычислены приближенно по одной из квадратурных формул.

Обозначим  $\bar{f}_j = f_j - \chi_{j+M} + \chi_{j-M}$ . Тогда решение поставленной задачи сводится к решению системы из уравнений

$$\Phi_{j-M} + \Phi_{j+M} = \bar{f}_j, \quad j = \overline{0, N}. \quad (16)$$

Систему (16) предлагается решать в три этапа:

– на первом этапе будем последовательно при  $j = -M, \dots, N+M$  определять значения  $\bar{\Phi}_j$  по расчетной формуле

$$\bar{\Phi}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } -M \leq j < M, \\ \bar{f}_{j-M} - \Phi_{j-2M}, & \text{если } M \leq j \leq N+M; \end{cases}$$

– на втором этапе будем последовательно при  $j = N+M, \dots, -M$  определять значения  $\bar{\Phi}_j$  по формуле

$$\bar{\Phi}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } N-M < j \leq N+M, \\ \bar{f}_{j+M} - \Phi_{j+2M}, & \text{если } -M \leq j \leq N-M; \end{cases}$$

– на третьем этапе искомые значения  $\Phi_j$  определяются по формуле

$$\Phi_j = \frac{\bar{\Phi}_j + \bar{\Phi}_j}{2}.$$

**Модельный пример 3.** Пусть требуется найти функцию  $\varphi(x)$  в задаче (3)–(5), если известно, что  $a = 1$ ,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} - 2xe^{-x^2}$$

и, кроме того, дополнительно известной является функция

$$u(1/2, x) = e^{-(x+1/2)^2} + \frac{1}{1+(x-1/2)^2}.$$

**Замечание 5.** Точное решение задачи дается функцией

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

при точном решении задачи Коши (3)–(5), определяемом функцией

$$u(t, x) = e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}.$$

Зафиксируем следующие параметры метода:  $A = 5/2, \tau = h = 0,1$ .

Значения интегралов  $\chi_{j \pm M}$  вычислялись приближенно при помощи многомерного аналога составной квадратурной формулы трапеций с шагом  $h = 0,1$ . Результаты численного решения задачи приведены на рис. 4.

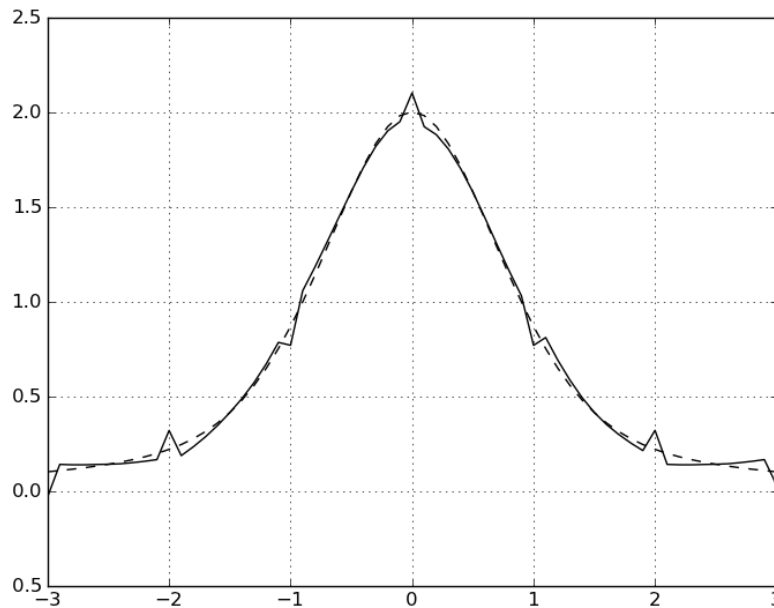


Рис. 4. Решение модельного примера 3

Теперь рассмотрим вторую задачу. Предположив, что в задаче Коши (3)–(5) известной является функция  $\varphi(x)$ , рассмотрим проблему восстановления функции  $\psi(x)$  в дополнительном предположении о том, что известной является функция  $u(T, x)$ .

В данном случае известными слагаемыми в уравнении (15) считаем значения  $\varphi_{j \pm M}, j = \overline{M, N-M}$ . Тогда система (15) сводится к системе

$$\chi_{j+M} - \chi_{j-M} = \overline{f}_j, \quad j = \overline{0, N}, \quad (17)$$

где  $\overline{f}_j = f_j - \varphi_{j-M} - \varphi_{j+M}$ .

Систему уравнений (17) будем решать по аналогии с системой (16). Решение проведем в три этапа:

– на первом этапе последовательно при  $j = -M, \dots, N + M$  вычисляются значения

$$\bar{\chi}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } -M \leq j < M, \\ \bar{f}_{j-M} + \bar{\chi}_{j-2M}, & \text{если } M \leq j \leq N + M; \end{cases}$$

– на втором этапе последовательно при  $j = N + M, \dots, -M$  вычисляются значения

$$\bar{\chi}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } N - M < j \leq N + M, \\ \bar{f}_{j+M} - \bar{\chi}_{j+2M}, & \text{если } -M \leq j \leq N - M; \end{cases}$$

– на третьем этапе значения  $\chi_j$  вычисляются по формуле

$$\chi_j = \frac{\bar{\chi}_j + \bar{\chi}_j}{2}, \text{ при } j = -M, \dots, N - M.$$

Далее, для того чтобы на основании найденного набора значений  $\chi_j$  восстановить функцию  $\psi(x)$ , необходимо решить относительно этой функции систему из интегральных уравнений:

$$\frac{1}{a} \int_{x_j - aT}^{x_j + aT} \psi(\xi) d\xi = \chi_j, j = \overline{0, N}. \quad (18)$$

Эта система представляет собой записанное в каждой из точек  $x = x_j$  интегральное уравнение

$$\frac{1}{a} \int_{x - at^*}^{x + at^*} \psi(\xi) d\xi = \chi(x). \quad (19)$$

Для решения этого интегрального уравнения предлагается привлечь метод сплайн-коллокации, а также непрерывный операторный метод. Приравняем левые и правые части уравнения (19) в каждой точке  $x = x_j$ , а интеграл в уравнении (19) аппроксимируем при помощи составной квадратурной формулы трапеций по узлам  $x_j$ . Полученную в результате систему из линейных относительно неизвестных  $\psi_j = \psi(x_j)$  уравнений

$$\frac{h}{2a} \sum_{k=j-M}^{j+M-1} [\psi_k + \psi_{k+1}] = \chi_j \quad (20)$$

предлагается решать при помощи непрерывного операторного метода.

Обозначим  $\Psi = (\psi_{-M}, \dots, \psi_{N+M})^T$ ,  $\chi = (\chi_{-M}, \dots, \chi_{N+M})^T$ , а через  $A$  обозначим матрицу системы (20). Тогда применение непрерывного

операторного метода к решению системы (20) сводится к решению следующей задачи Коши для операторного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\sigma} = \mathbf{A}\bar{\psi}(\sigma) - \chi, \quad (21)$$

$$\bar{\psi}(0) = \alpha, \quad (22)$$

где вспомогательная вектор-функция  $\bar{\psi}(\sigma)$  ( $\sigma \geq 0$ ) связана с искомой вектор-функцией  $\bar{\psi}$  предельным соотношением  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\psi}(\sigma) = \psi$ . Вектор  $\alpha$  размерности  $N + 2M + 1$  в соответствии с описанием непрерывного операторного метода может быть зафиксирован произвольным образом; однако в целях ускорения сходимости итерационного процесса целесообразно представляется зафиксировать все компоненты вектора  $\alpha$  нулями.

Начальная задача (21)–(22) может быть решена любым численным методом решения дифференциальных уравнений. С практической точки зрения подходящим методом является метод Эйлера как сочетающий в себе простоту с высокой эффективностью решения поставленной задачи. Пусть  $\theta$  – шаг метода Эйлера, а  $L$  – число итераций метода Эйлера. Тогда численное решение задачи (21)–(22) выполняется с помощью следующей вычислительной схемы:

$$\bar{\psi}_{r+1} = \bar{\psi}_r + \theta \cdot \{\mu \circ [\mathbf{A}\bar{\psi}_r - \chi]\}, \quad r = \overline{0, L-1},$$

где  $\bar{\psi}_r = \bar{\psi}(\sigma_r)$ ,  $\sigma_r = r\theta$ ; через  $\mu$  обозначен вектор  $\mu = (\mu_{-M}, \dots, \mu_{N+M})^T$  с компонентами, равными  $+1$  или  $-1$ , определяемыми таким образом, чтобы выписанная выше система была асимптотически устойчивой. Операция  $\circ$  определяется как поэлементное произведение векторов одинаковой размерности.

Приближенное решение задачи фиксируется равенством  $\psi = \bar{\psi}_L$ .

**Модельный пример 4.** Проведем восстановление функции  $\psi(x)$  в задаче Коши (3)–(5), если известно, что  $\Phi(t, x) \equiv 0, \gamma = 1$ :

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}, \quad u(1, x) = e^{-(x+1)^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

**Замечание 6.** Точным решением задачи является функция

$$\psi(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} - 2xe^{-x^2}$$

при точном решении задачи Коши (3)–(5), определяемом функцией

$$u(t, x) = e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}.$$

При численных расчетах были зафиксированы следующие параметры численного метода:  $A = 10, \tau = h = 0,1, \theta = 0,1, L = 10^3$ .

Результат численного решения поставленной задачи показан на рис. 5.



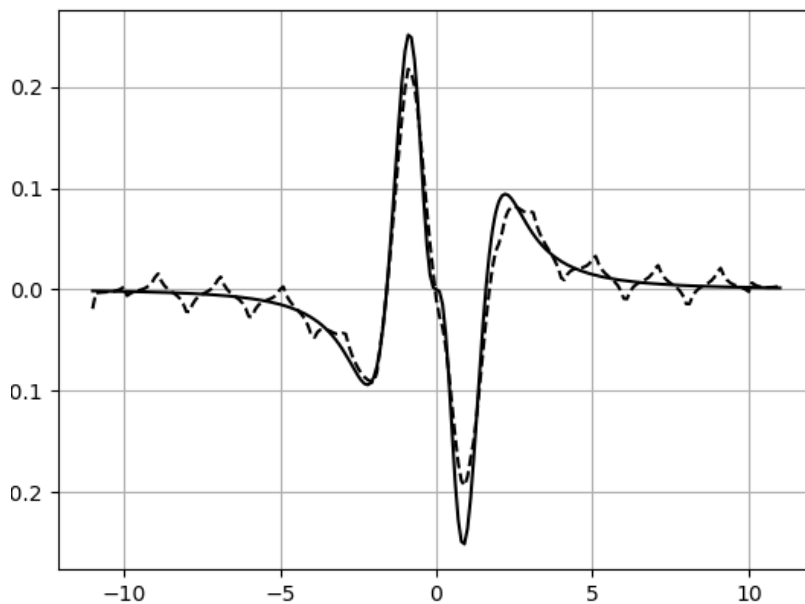


Рис. 5. Решение модельного примера 4

### Заключение

В настоящей статье были рассмотрены проблемы численного восстановления начальных условий в задачах Коши для линейных уравнений параболического и гиперболического типов. В качестве дополнительной информации были использованы значения решений рассматриваемых задач Коши при фиксированном значении переменной  $t$ . При построении численных методов используется непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Решение модельных примеров продемонстрировало высокую эффективность предложенных численных методов. Представляет значительный теоретический и практический интерес обобщение указанных численных методов на случай нелинейных уравнений, а также на случай многомерных задач.

### Библиографический список

1. **Алифанов, О. М.** Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – Москва : Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. **Алифанов, О. М.** Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, Е. А. Румянцев. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.
3. **Бек, Дж.** Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, D. D. Р. Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер мл. – Москва : Мир, 1989. – 312 с.
4. **Латтес, Р.** Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж. Л. Лионс. – Москва : Мир, 1970. – 336 с.
5. *Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction* / D. D. Ang, R. Gorenflo, V. K. Le, D. D. Trong. – Springer, 2002. – 183 p.
6. **Özisik, M. N.** *Inverse Heat Transfer. Fundamentals and applications* / M. N. Özisik, H. R. V. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 330 p.
7. **Кабанихин, С. И.** Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

8. **Hasanov Hasanoglu, A.** Introduction to Inverse Problems for Differential Equations / Hasanoglu A. Hasanov, V. G. Romanov. – Springer International Publishing AG, 2017. – 261 p.
9. **Самарский, А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
10. **Самарский, А. А.** Итерационное решение ретроспективной задачи теплопроводности / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, В. Н. Васильев // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 119–127.
11. **Самарский, А. А.** Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : ЛКИ, 2009. – 480 с.
12. **Кабанихин, С. Н.** Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения / С. Н. Кабанихин, О. И. Криворотко // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 90–101.
13. Optimization Method in Dirichlet Problem for Wave Equation / S. I. Kabanikhin, M. A. Bektemesov, D. B. Nurseitov, O. I. Krivorotko, A. N. Alimova // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2012. – Vol. 20, № 2. – P. 193–211.
14. **Васильев, В. И.** Итерационный метод решения задачи Дирихле и ее модификаций / В. И. Васильев, А. М. Кардашевский, В. В. Попов // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 3. – С. 38–51.
15. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
16. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 2. – С. 149–163. – DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163.
17. **Бойков, И. В.** О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3. – С. 47–62. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-4.
18. **Бойков, И. В.** О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1. – С. 97–112. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-8.
19. **Boikov, I. V.** On an iterative method for solution of direct problem for nonlinear hyperbolic differential equations / I. V. Boikov, V. A. Ryazantsev // Журнал Средневолжского математического общества. – 2020. – Т. 22, № 2. – С. 155–163. – DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.
20. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.

### *References*

1. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse problems of heat transfer]. Moscow: Mashinostroenie, 1988, 280 p. [In Russian]
2. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev E. A. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* [Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse problems of heat transfer]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988, 288 p. [In Russian]
3. Bek Dzh., Blakuell D. D. R. B., Sent-Kler Ch. ml *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Ill-posed inverse heat conduction problems]. Moscow: Mir, 1989, 312 p. [In Russian]

4. Lattes R., Lions Zh. L. *Metod kvaziobrashcheniya i ego prilozheniya* [Quasi-inversion method and its applications]. Moscow: Mir, 1970, 336 p. [In Russian]
5. Ang D. D., Gorenflo R., Le V. K., Trong D. D. *Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction*. Springer, 2002, 183 p.
6. Özisik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer. Fundamentals and applications*. New York: Taylor & Francis, 2000, 330 p.
7. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p. [In Russian]
8. Hasanov Hasanoglu A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Springer International Publishing AG, 2017, 261 p.
9. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. H. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS, 2003, 784 p. [In Russian]
10. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. N. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. 1997, vol. 9, no. 5, pp. 119–127. [In Russian]
11. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: LKI, 2009, 480 p. [In Russian]
12. Kabanikhin S. N., Krivorot'ko O. I. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Siberian journal of computational mathematics]. 2012, vol. 15, no. 4, pp. 90–101. [In Russian]
13. Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2012, vol. 20, no. 2, pp. 193–211.
14. Vasil'ev V. I., Kardashevskiy A. M., Popov V. V. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU]. 2017, vol. 24, no. 3, pp. 38–51. [In Russian]
15. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
16. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2019, vol. 21, no. 2, pp. 149–163. DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163. [In Russian]
17. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 47–62. DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-4. [In Russian]
18. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fi-ziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2020, no. 1, pp. 97–112. DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-8. [In Russian]
19. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2020, vol. 22, no. 2, pp. 155–163. DOI 10.15507/2079-6900.22.202002. [In Russian]
20. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations in mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p. [In Russian]

**Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
 профессор, заведующий кафедрой  
 высшей и прикладной математики,  
 Пензенский государственный университет  
 (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

**Boikov Il'ya Vladimirovich**

Doctor of physical and mathematical  
 sciences, professor, head of the sub-  
 department of higher and applied  
 mathematics, Penza State University  
 (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Рязанцев Владимир Андреевич**

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра высшей и прикладной  
математики, Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

**Ryazantsev Vladimir Andreevich**

Candidate of engineering sciences,  
associate professor, sub-department  
of higher and applied mathematics,  
Penza State University (40 Krasnaya  
street, Penza, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Бойков, И. В. Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 68–84. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-6.

## НОВЫЙ ПРИМЕР КОНЕЧНОМЕРНОЙ РЕДУКЦИИ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПОЧКИ ТИПА ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Интегрируемые дискретные уравнения чаще всего рассматривают в рамках численного исследования своих непрерывных аналогов. В то же время непрерывные уравнения получены с помощью предельного перехода от дискретных систем. Во многих отношениях дискретная картина оказывается более исследуемой и фундаментальной нежели дифференциальная. Разностные уравнения, или цепочки, возникают во многих задачах математической физики. Дискретные уравнения часто рассматриваются как преобразования Бэклунда непрерывных и дифференциально-разностных уравнений. Построение конечномерных редукций интегрируемых систем является одним из наиболее эффективных способов получения их частных решений. Целью данной работы является построение новых конечномерных редукций для интегрируемой дискретной цепочки типа цепочки Тоды и анализ интегрируемости полученных конечномерных редукций.

*Материалы и методы.* Одним из признаков интегрируемости системы уравнений является существование ее представления в виде условия совместности двух линейных уравнений (L–A пара). Именно на этом свойстве интегрируемой дискретной системы основано построение граничных условий и интегралов движения полученных конечномерных редукций. В работе используются основные методы симметричного подхода к исследованию интегрируемых систем. Привлекаются методы теории уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Результаты.* Найдена новая конечномерная редукция дискретной цепочки типа цепочки Тоды, совместимая с L–A парой. Построены интегралы движения, определена дифференциально-разностная симметрия полученной конечномерной системы и показана ее интегрируемость в квадратурах. Представлены граничные условия, приводящие систему к одной из версий дискретного уравнения Пенлеве  $dP_I$ .

*Выводы.* Простой и эффективный способ построения интегрируемых конечномерных редукций основан на совместности граничных условий с L–A парой. Дискретные аналоги уравнений Пенлеве могут быть получены как конечномерные редукции дискретной цепочки Тоды. Для построения пары Лакса дискретного уравнения Пенлеве как конечномерной редукции интегрируемой цепочки типа цепочки Тоды необходимо дальнейшее изучение граничных условий совместимых с L–A парой.

**Ключевые слова:** дискретное уравнение, дифференциально-разностное уравнение, граничное условие, конечномерная редукция, интеграл движения, симметрия, уравнение Пенлеве.

*T. G. Kazakova, R. R. Sattarova*

## A NEW EXAMPLE OF FINITE-DIMENSIONAL REDUCTION OF A DISCRETE CHAIN OF THE TODA CHAIN TYPE

### Abstract.

*Background.* Integrable discrete equations considered in the framework of the numerical study of their continuous analogs. Same time continuous equations obtained using the limit from the discrete systems. Many respects the discrete case to be more investigate and fundamental than differential. Difference equations arise in many problems of mathematical physics. Often discrete equations studied as Bäcklund transformations of continuous or differential difference equations. The construction of finite-dimensional reductions of integrable system is one of the most effective ways to obtain their particular solutions. The aim of this paper is construction new finite-dimensional reduction of the discrete chain Toda type and analyze the integrability of the resulting reductions.

*Materials and methods.* The integrable equation is a consistency condition of two linear equations (L–A pair). The construction of boundary conditions and integrals of motion of finite-dimensional reductions based on these properties of an integrable discrete system. The work uses the main methods of the symmetry approach to the study of integrable systems. The methods of the theory of partial differential equations and ordinary differential equations used also.

*Results.* Found a new finite-dimensional reduction of a discrete chain of the Toda chain type consistent with the L–A pair. Conserved quantities and difference-differential symmetry of the resulting finite-dimensional reductions are determined. Its integrability by quadratures proved. Boundary conditions that lead the system to one of the versions of the discrete Painlevé equation  $dP_I$  presented.

*Conclusions.* A simple and effective way of constructing integrable finite-dimensional reduction based on the compatibility of boundary conditions with L–A pair. Discrete analog of the Painlevé equations can be obtain a finite dimensional reductions of eh discrete Toda chains. it is necessary further study the boundary conditions compatible with the L–A pair to construct the Lax pair if the discrete Painlevé equation as a finite-dimensional reduction of an integrable chain of the Toda chain type.

**Keywords:** discrete equation, differential-difference equation, boundary condition, finite-dimensional reduction, integrals of motion, symmetry, Painlevé equation.

### Введение

Будем рассматривать дискретные цепочки типа цепочки Тоды на пяти-точечном шаблоне (рис. 1):

$$q_{m+1,n} = f(q_{m,n}, q_{m-1,n}, q_{m,n+1}, q_{m,n-1}), \quad (1)$$

где  $q = q_{m,n}$  – функции, определенные на пространстве  $Z \times Z$ . Переменную  $m$  интерпретируем как дискретное время,  $n$  – как дискретную пространственную переменную. Одна из классификаций интегрируемых цепочек такого типа приведена в работе В. Э. Адлера [1]. Список состоит из восьми уравнений, не переводимых друг в друга точечными преобразованиями.

Построение конечномерных редукций интегрируемых систем является одним из наиболее эффективных способов получения их частных решений. В работах [2, 3] исследованы конечномерные редукции цепочек типа цепочки Тоды, представленных в [1]. Одним из признаков интегрируемости системы

уравнений является существование ее представления в виде условия совместности двух линейных уравнений ( $L-A$  пара). Именно на этом свойстве интегрируемой дискретной системы основаны работы [2, 3], в которых приведены граничные условия, совместимые с  $L-A$  парой, построены интегралы движения и показана интегрируемость в квадратурах полученных конечномерных редукций.

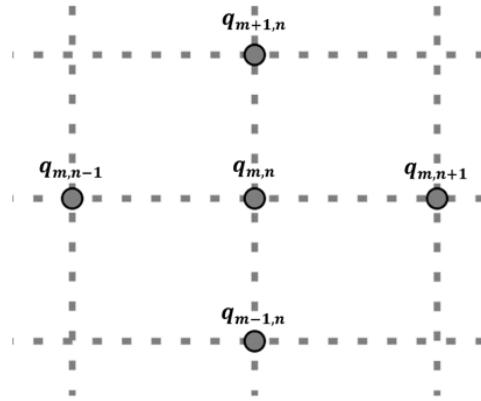


Рис. 1. Квадратная решетка для уравнения типа Тоды

Из последних работ отметим [4], в которой показано использование граничных условий, полученных в работе [2] для дискретного аналога уравнения Гейзенберга из списка цепочек вида (1). В данной работе рассматриваются граничные условия на Quad-графе.

Использование предложенной в [2] методики построения граничных условий, совместимых с  $L-A$  парой позволило найти примеры редукций дискретной цепочки Тоды

$$q_{m+1,n} - 2q_{m,n} + q_{m-1,n} = \frac{\ln\left(e^{q_{m,n+1}-q_{m,n}} + 1\right)}{\ln\left(e^{q_{m,n}-q_{m,n-1}} + 1\right)},$$

соответствующие дискретным уравнениям Пенлеве  $dP_{III}$ ,  $dP_V$  и  $dP_{VI}$  [5]. Были построены пары Лакса для данных уравнений.

Связь редукций дискретных интегрируемых систем и дискретных уравнений Пенлеве показана и в других работах. Например, в [6] показан метод построения пары Лакса для дискретных уравнений Пенлеве как периодического замыкания дискретного уравнения Кортвега – де Фриза.

В настоящей работе мы будем исследовать уравнение

$$e^{q_{m+1,n}-q_{m,n}} - e^{q_{m,n}-q_{m-1,n}} = e^{q_{m,n+1}-q_{m,n}} - e^{q_{m,n}-q_{m,n-1}} \tag{2}$$

из списка интегрируемых дискретных цепочек типа цепочки Тоды (1) [1]. Данное уравнение связано с преобразованиями Бэклунда для цепочки Тоды [7]. В секции 1 построена новая конечномерная редукция системы (2). Секция 2 посвящена интегрируемости конечномерных редукций, совмести-

мых с  $L$ - $A$  парой. В секции 3 представлено граничное условие, приводящее уравнение (2) к одной из версий дискретного уравнения Пенлеве  $dP_I$ .

### 1. Граничные условия, совместимые с $L$ - $A$ парой

Пусть уравнение (1) эквивалентно условию совместности

$$L_{m+1,n}(\lambda) A_{m,n}(\lambda) = A_{m,n+1}(\lambda) L_{m,n}(\lambda) \quad (3)$$

системы двух линейных уравнений

$$Y_{m,n+1}(\lambda) = L_{m,n}(\lambda) Y_{m,n}(\lambda), \quad (4)$$

$$Y_{m+1,n}(\lambda) = A_{m,n}(\lambda) Y_{m,n}(\lambda). \quad (5)$$

На бесконечную цепочку (1) в точке  $n=N$  накладывается граничное условие

$$q_{m,n} = H(m, q_{m,N+1}, q_{m-1,N+1}, \dots, q_{m,N+M}, q_{m-1,N+M}). \quad (6)$$

**Определение 1** [2]. Граничное условие (6) называется совместимым с  $L$ - $A$  парой (3), если уравнение (5) в пространственной точке  $n=N$

$$Y_{m+1,N}(\lambda) = A_{m,N}(\lambda) Y_{m,N}(\lambda) \quad (7)$$

обладает дополнительной точечной симметрией вида

$$\tilde{Y}_{m,N}(\lambda) = H(m, [q], \lambda) Y_{m,N}(\lambda), \quad \tilde{\lambda} = h(\lambda). \quad (8)$$

Матрица  $H(m, [q], \lambda) = H(m, q_{m,N+1}, q_{m-1,N+1}, \dots, q_{m,N+M}, q_{m-1,N+M})$ , определяющая преобразование (8), зависит от конечного числа сдвигов переменной  $q_{m,n}$  и параметра  $\lambda$ .

Рассматриваемая дискретная цепочка (2) имеет следующую  $L$ - $A$  пару [8]:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda + e^{q_{m,n} - q_{m-1,n}} & -e^{q_{m,n}} \\ e^{-q_{m-1,n}} & -1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + e^{q_{m,n} - q_{m,n-1}} & -e^{q_{m,n}} \\ e^{-q_{m,n-1}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Граничное условие (6) сводит цепочку (1) к задаче на полуоси. Для того чтобы получить конечномерную редукцию системы (1), необходимо рассмотреть два граничных условия (рис. 2):

$$F_1 = e^{-q_{m,-1}} = F_1(e^{-q_{m,0}}), \quad (11)$$

$$F_1 = e^{q_{m,N+1}} = F_1(e^{q_{m,N}}). \quad (12)$$



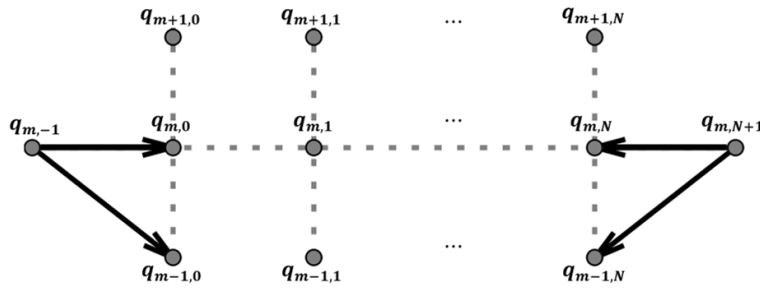


Рис. 2. Шаблон для граничных условий  $q_{m,-1}, q_{m,N+1}$

**Предложение 1.** Пусть матрица  $H(m, q_{m-1,0}, \lambda)$  зависит от динамической переменной  $q_{m-1,0}$ , тогда граничное условие, совместимое с  $L$ - $A$  парой (9), (10), имеет вид

$$F_1 = e^{-q_{m,-1}} = e^{-q_{m-1,0}} - a_1 e^{-q_{m,0}}, \tag{13}$$

где  $a_1 = \text{const}$ ,  $\tilde{\lambda}_1 = \frac{a_1^2}{\lambda}$ ,

$$H(m, q_{m-1,0}, \lambda) = \left(-\frac{a_1}{\lambda}\right)^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda + a_1}{\lambda} e^{-q_{m-1,0}} & -\frac{a_1}{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

**Доказательство.** Согласно определению 1 граничное условие  $e^{q_{m,-1}}$  совместимо с  $L$ - $A$  парой, если существуют матрица  $H(m, q_{m-1,0}, \lambda)$  и инволюция  $\tilde{\lambda} = h(\lambda)$  такие, что для любого решения  $Y_{m,0}(\lambda)$  уравнения (7) функция (8) является решением этого же уравнения. Это значит, что должно выполняться следующее равенство:

$$H(m+1, q_{m,0}, \lambda) A_{m,0}(\lambda) = A_{m,0}(\tilde{\lambda}) H(m, q_{m-1,0}, \lambda). \tag{15}$$

Обозначим  $h_{i,j} = (H(m, \lambda))_{i,j}$ ,  $\bar{h}_{i,j} = (H(m+1, \lambda))_{i,j}$  и  $F_1 = e^{-q_{m,-1}}$ .

Подставим матрицу  $A$  (10) в (15) и в скалярном виде получим систему из четырех уравнений:

$$\bar{h}_{11}(\lambda + F_1 e^{q_{m,0}}) + \bar{h}_{12} F_1 = h_{11}(\tilde{\lambda} + F_1 e^{q_{m,0}}) - h_{21} e^{q_{m,0}}, \tag{16}$$

$$-\bar{h}_{11} F_1 - \bar{h}_{12} = h_{12}(\tilde{\lambda} + F_1 e^{q_{m,0}}) - h_{22} e^{q_{m,0}}, \tag{17}$$

$$\bar{h}_{21}(\lambda + F_1 e^{q_{m,0}}) + \bar{h}_{22} F_1 = h_{11} F_1 - h_{21}, \tag{18}$$

$$-\bar{h}_{21} e^{q_{m,0}} - \bar{h}_{22} = h_{12} F_1 - h_{22}. \tag{19}$$

Пусть  $h_{12} \neq 0$ , тогда из (19) можно найти неизвестную  $F_1$ :

$$F_1 = \frac{h_{22} - \bar{h}_{22} - \bar{h}_{21}e^{q_{m,0}}}{h_{12}}.$$

Анализ системы (16)-(19) показывает, что нетривиальное решение существует только тогда, когда  $h_{12} = 0$ .

Дифференцирование уравнения (19) по переменной  $q_{m-1,0}$  показывает, что  $\frac{dh_{22}}{dq_{m-1,0}} = 0$ , т.е.  $h_{22} = h_{22}(m)$ . Из этого же уравнения находим неизвестную  $\bar{h}_{21}$ :

$$\bar{h}_{21} = (h_{22}(m) - h_{22}(m+1))e^{-q_{m,0}}.$$

Предположим, что  $h_{22} \neq \bar{h}_{11}$ , тогда найдем выражение для функции  $F_1$ :

$$F_1 = e^{-q_{m-1,0}} - \frac{h_{22}(m) - h_{22}(m+1)}{h_{22}(m) - h_{22}(m-1)} \lambda e^{q_{m,0}}.$$

Учитывая независимость функции  $F_1$  от параметра  $\lambda$ , с использованием уравнения (17) получим Предложение 1.

**Предложение 2.** Пусть матрица  $H(m, q_{m-1,N}, \lambda)$  зависит от динамической переменной  $q_{m-1,N}$ , тогда граничное условие, совместимое с  $L-A$  парой (9), (10), имеет вид

$$e^{q_{m,N+1}} = F_2(e^{q_{m,N}}) = -a_2 e^{q_{m,N}}, \quad (20)$$

где  $a_2 = \text{const}$ ,  $\tilde{\lambda}_2 = \frac{a_2^2}{\lambda}$ ,

$$H(m, q_{m-1,N}, \lambda) = \left(-\frac{a_2}{\lambda}\right)^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda + a_2}{\lambda} e^{-q_{m-1,N}} & -\frac{a_2}{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

**Доказательство.** Согласно определению 1 граничное условие  $e^{q_{m,N+1}}$  совместимо с  $L-A$  парой, если выполняется следующее равенство:

$$H(m+1, q_{m,N}, \lambda) A_{m,N}(\lambda) = A_{m,N}(\tilde{\lambda}) H(m, q_{m-1,N}, \lambda). \quad (22)$$

Обозначим  $h_{i,j} = (H(m, \lambda))_{i,j}$ ,  $\bar{h}_{i,j} = (H(m+1, \lambda))_{i,j}$  и  $F_2 = e^{q_{m,N+1}}$ .

Подставим матрицу  $A$  (10) в (22) и в скалярном виде получим систему из четырех уравнений:

$$\bar{h}_{11}(\lambda + F_2 e^{-q_{m,N}}) + \bar{h}_{12} e^{-q_{m,N}} = h_{11}(\tilde{\lambda} + F_2 e^{-q_{m,N}}) - h_{21} F_2, \quad (23)$$

$$-\bar{h}_{11}F_2 - \bar{h}_{12} = h_{12} \left( \tilde{\lambda} + F_2 e^{-q_{m,N}} \right) - h_{22}F_2, \quad (24)$$

$$\bar{h}_{21} \left( \lambda + F_2 e^{-q_{m,N}} \right) + \bar{h}_{22} e^{-q_{m,N}} = h_{11} e^{-q_{m,N}} - h_{21}, \quad (25)$$

$$-\bar{h}_{21}F_2 - \bar{h}_{22} = h_{12} e^{-q_{m,N}} - h_{22}. \quad (26)$$

Пусть  $h_{21} \neq 0$ , тогда из (26) можно найти неизвестную  $F_2$ :

$$F_2 = \frac{h_{22} - \bar{h}_{22} - h_{21} e^{-q_{m,N}}}{\bar{h}_{21}}.$$

Анализ системы уравнений (23)–(26) показывает, что нетривиальное решение можно получить только при  $h_{12} = 0$ . Из уравнения (24) мы получаем, что  $h_{22}(m, \lambda) = h_{11}(m-1, \lambda)$ . Продифференцируем уравнение (25) по переменной  $q_{m-1, N}$ :

$$\frac{dF_2}{dq_{m-1,0}} = \frac{1}{\bar{h}_{21}} \frac{dh_{11}}{dq_{m-1,0}} - \frac{e^{q_{m,0}}}{\bar{h}_{21}} \frac{dh_{21}}{dq_{m-1,0}}.$$

Проинтегрируем уравнение и получим, что  $\bar{h}_{21} = e^{-q_{m,0}}$ . Таким образом, найдем граничное условие:

$$F_2 = -a_2 e^{q_{m,N}}.$$

Подставим  $F_2$  в систему (23)–(26) с учетом  $h_{12} = 0$  и найдем коэффициенты матрицы  $H(m, \lambda)$ :

$$h_{11} = \left( -\frac{a_2}{\lambda} \right)^{m-1}, \quad h_{22} = \left( -\frac{a_2}{\lambda} \right)^m, \quad h_{21} = \left( -\frac{a_2}{\lambda} \right)^{m-1} \left( \frac{\lambda + a_2}{\lambda} \right) e^{-q_{m-1,0}}.$$

Таким образом, мы получили Предложение 2. Заметим, что при  $h_{21} = 0$  получаем тривиальное решение.

При условиях, указанных в предложениях 1 и 2, совместимыми с  $L$ - $A$  парой являются граничные условия:

$$F_1 = e^{-q_{m,-1}} = e^{-q_{m-1,0}} - a_1 e^{-q_{m,0}}, \quad (27)$$

$$F_2 = e^{q_{m,N+1}} = -a_2 e^{q_{m,N}}, \quad (28)$$

где  $a_1, a_2$  – произвольные постоянные;

$$H_i(m, \lambda) = \left( -\frac{a_i}{\lambda} \right)^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda + a_i}{\lambda} e^{-q_{m-1,0}} & -\frac{a_i}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{a_i^2}{\lambda}, \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

## 2. Интегрируемость конечномерных редукций

Рассмотрим конечномерную редукцию цепочки (2) с граничными условиями (27), (28), совместимыми с  $L$ - $A$  парой (9), (10). При  $N=1$  в исследуемой конечномерной системе динамическими переменными являются  $q_{m,0}, q_{m-1,0}$  (рис. 3).

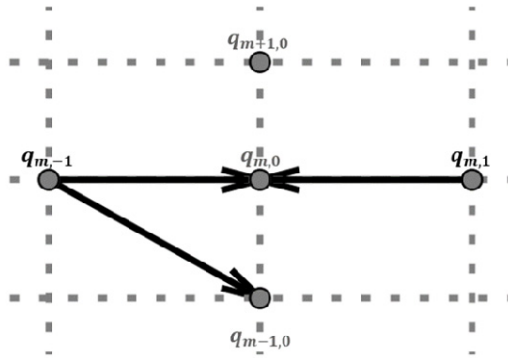


Рис. 3. Граничные условия для  $q_{m,-1}, q_{m,1}$   
( $q_{m,0}, q_{m-1,0}$  – динамические переменные)

**Теорема 1** [5]. Пусть задана конечномерная система

$$q_{m+1,n} = f(q_{m,n}, q_{m-1,n}, q_{m,n+1}, q_{m,n-1}), \quad m \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N,$$

$$q_{m,-1} = F_1(m, q_{m,0}, q_{m-1,0}),$$

$$q_{m,N+1} = F_2(m, q_{m,N}, q_{m-1,N})$$

такая, что инволюции  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \lambda$ . Тогда функция

$$g(\lambda) = \text{tr} \left( P(m, \lambda) H_1^{-1}(m, \lambda) P^{-1}(m, \lambda) H_2(m, \lambda) \right), \quad (30)$$

где  $P(m, \lambda) = L_{m,N}(\lambda) \dots L_{m,1}(\lambda)$  и  $\text{tr}(A)$  обозначает след матрицы  $A$ , является производящей функцией интегралов движения конечномерной цепочки.

Пусть инволюции для граничных условий (27), (28) совпадают, т.е.  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda} = \frac{a^2}{\lambda}$ , где  $a = a_1 = a_2$ . По теореме 1 для конечномерной дискретной системы

$$e^{-q_{m,-1}} = e^{-q_{m-1,0}} - a e^{-q_{m,0}}, \quad (31)$$

$$e^{q_{m+1,0} - q_{m,0}} - e^{q_{m,0} - q_{m-1,0}} = e^{q_{m,1} - q_{m,0}} - e^{q_{m,0} - q_{m,-1}}, \quad (32)$$

$$e^{q_{m,1}} = -a e^{q_{m,0}} \quad (33)$$

построен первый интеграл

$$I_1 = e^{q_{m+1,0}-q_{m,0}} - e^{q_{m,0}-q_{m-1,0}}. \quad (34)$$

Для интегрирования системы (31)–(33) интегралов движения, найденных с помощью теоремы 1, недостаточно. Решение конечномерной системы можно построить с помощью дифференциально-разностных симметрий [3].

Симметрией дискретного уравнения (1) называется уравнение вида

$$\frac{dq_{m,n}}{dt} = g(q_{m,n-k}, q_{m-1,n-k}, \dots, q_{m,n+k}, q_{m-1,n+k}), \quad (35)$$

удовлетворяющее равенству (см. [9])

$$T_m g([q]) = D_t (f([q])),$$

где введены следующие обозначения:  $[q]$  – конечное число функций дискретных переменных  $q_{m,n}$ ;  $T_m(q_{m,n}) = q_{m+1,n}$  – сдвиг по направлению  $m$ ;  $D_t$  – производная по переменной  $t$ .

Будем считать, что уравнение (35) эквивалентно условию совместимости

$$D_t L_{m,n}(t, \lambda) = V_{m,n+1}(t, \lambda) L_{m,n}(t, \lambda) - L_{m,n}(t, \lambda) V_{m,n}(t, \lambda) \quad (36)$$

пары линейных уравнений

$$Y_{n+1}(t, \lambda) = L_{m,n}(t, \lambda) Y_n(t, \lambda), \quad (37)$$

$$D_t Y_n(t, \lambda) = V_n(t, \lambda) Y_n(t, \lambda). \quad (38)$$

Для цепочки (32) дифференциально-разностной симметрией является уравнение

$$g_1 = \frac{dq_{m,n}}{dt_1} = q_{t_1} = e^{q_{m,n+1}-q_{m,n}} + e^{q_{m,n}-q_{m-1,n}}, \quad (39)$$

для которой матрица  $V$  имеет вид

$$V_{m,n} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & -e^{q_{m,n}} \\ e^{-q_{m-1,n-1}} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Рассмотрим конечномерную редукцию уравнения (35) с граничным условием (6), совместимым с представлением (36). Определение граничного условия для уравнения (35), совместимого с парой Лакса (37), (38), аналогично определению 1 (см. [3]). Это означает, что в точке  $n = N$  должно быть выполнено равенство

$$D_t H(t, [q], \lambda) = V_N(t, \tilde{\lambda}) H(t, [q], \lambda) - H(t, [q], \lambda) V_N(t, \lambda).$$

В силу того, что уравнение (39) нас интересует как симметрия для цепочки (32), мы рассматриваем граничные условия (31), (33). Матрицы

$H(t, [q], \lambda)$  и инволюции  $\tilde{\lambda} = h(\lambda)$  остаются такими же, что и для рассматриваемой цепочки (32), а именно (29).

Построим дополнительный первый интеграл для (32) с помощью следующей системы уравнений [10]:

$$\Phi_j(t_j, q_{m,0}, q_{m-1,0}) = t_j - \phi_j(q_{m,0}, q_{m-1,0}), \quad j=1,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_{m,0}} \frac{dq_{m,0}}{dt_1} = \delta_{11}.$$

Дополнительный первый интеграл:

$$\Psi_1 = m - \alpha m (aq_{m,0} + I_1). \quad (41)$$

Получили решение системы (31)–(33):

$$e^{q_{m,0}} = e^a e^{\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\Psi_1}{m}\right) - I_1},$$

где  $a, \alpha$  – произвольные постоянные;  $I_1$  – первый интеграл (34);  $\Psi_1$  – дополнительный первый интеграл (41).

### 3. Дискретные уравнения Пенлеве

В работе [5] на примере дискретной цепочки Тоды

$$q_{m+1,n} - 2q_{m,n} + q_{m-1,n} = \frac{\ln(e^{q_{m,n+1} - q_{m,n}} + 1)}{\ln(e^{q_{m,n} - q_{m,n-1}} + 1)}$$

с граничными условиями

$$q_{m,-1} = F_1(m, q_{m,0}, q_{m-1,0}), \quad q_{m,1} = F_2(m, q_{m,0}, q_{m-1,0}),$$

совместимыми с  $L$ - $A$  парой, которым соответствуют различные инволюции  $\tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2$ , показано, что конечномерная система обладает парой Лакса, типичной для дискретных уравнений Пенлеве.

Рассмотрим конечномерную редукцию цепочки (2) с граничными условиями (27), (28). Пусть инволюции для граничных условий не совпадают

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{a_1^2}{\lambda}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{a_2^2}{\lambda}, \quad a_1 \neq a_2.$$

Введем обозначение  $e^{q_{m,0}} = p_m$  и перепишем граничные условия:

$$F_1 = \frac{1}{p_{m-1}} - \frac{a_1}{p_m}, \quad (42)$$

$$F_2 = -a_2 p_m, \quad (43)$$

Подставим граничные условия (42), (43) в исходную цепочку (2):

$$a_2 - a_1 = a,$$

$$p_{m+1} + p_{m-1} = -p_m.$$

Получили тривиальный случай дискретного уравнения Пенлеве  $dP_1$  [11]:

$$p_{m+1} + p_{m-1} = -p_m + \frac{z}{p_m} + b$$

при  $z = b = 0$ .

Конечномерная редукция (2) при граничных условиях

$$\begin{aligned} e^{-q_{m,-1}} &= e^{-q_{m-1,0}} - a e^{-q_{m,0}}, \\ e^{q_{m,1}} &= -e^{q_{m-1,0}} + e^{-q_{m,0}} - a_1 e^{q_{m,0}} \end{aligned} \quad (44)$$

соответствует дискретному уравнению Пенлеве  $dP_1$ . Очевидно, граничному условию (44) соответствует матрица  $H$ , зависящая от большего числа динамических переменных  $q_{m,n}$ .

### Заключение

В результате работы построены интегрируемые граничные условия для дискретной цепочки типа цепочки Тоды, совместимые с  $L$ - $A$  парой.

Найдены интегралы движения конечномерной дискретной системы для конечномерной редукции рассматриваемой цепочки. С помощью первого интеграла и дифференциально-разностной симметрии построено решение одномерной редукции цепочки типа цепочки Тоды.

Показано, что дискретные аналоги уравнений Пенлеве могут быть получены как конечномерные редукции дискретной цепочки Тоды. Для построения пары Лакса дискретного уравнения Пенлеве как конечномерной редукции интегрируемой цепочки типа цепочки Тоды необходимо изучение граничных условий, совместимых с  $L$ - $A$  парой, которым соответствует дополнительная точечная симметрия  $\tilde{Y}_{m,N}(\lambda) = H(m, q_{m-1,N}, q_{m,N}, \lambda) Y_{m/N}(\lambda)$ .

### Библиографический список

1. **Adler, V. E.** On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices / V.E. Adler // J. of Nonlinear Math. Phys. – 2000. – Vol. 7, № 1. – P. 34–56.
2. **Habibullin, I. T.** Boundary condition for integrable discrete chains / I. T. Habibullin, T. G. Kazakova // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2001. – Vol. 34. – P. 10369–10376.
3. **Казакова, Т. Г.** Конечномерные редукции дискретных систем, интегрируемые в квадратурах / Т. Г. Казакова // Теоретическая и математическая физика. – 2004. – Т. 138, № 3. – С. 422–436.
4. **Caudrelier, V.** Integrable boundary for Quad-Graph systems: three-dimensional boundary consistency / V. Caudrelier, N. Cramp  b, Q. C. Zhang // SIGMA. – 2014. – Vol. 10, № 014. – P. 24.
5. **Kazakova, T. G.** Finite-dimensional reductions of the discrete Toda chain / T. G. Kazakova // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 8089–8112.

6. **Ormerod, C. M.** Discrete Painlevé equations and their Lax pairs as reductions of integrable lattice equations / C. M. Ormerod, H. Peter van der Kamp, G. R. Quispel // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2013. – Vol. 46, № 9 – P. 23.
7. **Hirota, R.** Nonlinear partial difference equations. I – V / R. Hirota // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1977. – Vol. 43. – P. 1423–1433, 2074–2078, 2079–2086.
8. **Suris, Yu. B.** Discrete time Toda systems / Yu. B. Suris // *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*. – 2018. – Vol. 51, № 33. – P. 60.
9. **Адлер, В. Э.** Симметричный подход к проблеме интегрируемости / В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // *Теоретическая и математическая физика*. – 2000. – Т. 125, № 3. – С. 355–424.
10. **Шабат, А. Б.** Симметрии нелинейных цепочек / А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // *Алгебра и анализ*. – 1990. – Т. 2, №2. – С. 377–400.
11. **Ramani, A.** Discrete Painleve equations: coalescences, limits and degeneracies / A. Ramani, B. Grammaticos // *Phys. A*. – 1996. – Vol. 228, № 1 – 4. – P. 160–171.

### **References**

1. Adler V. E. *J. of Nonlinear Math. Phys.* 2000, vol. 7, no. 1, pp. 34–56.
2. Habibullin I. T., Kazakova T. G. *J. Phys. A: Math. and Gen.* 2001, vol. 34, pp. 10369–10376.
3. Kazakova T. G. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2004, vol. 138, no. 3, pp. 422–436. [In Russian]
4. Caudrelier V., Crampé N., Zhang Q. C. *SIGMA*. 2014, vol. 10, no. 014, p. 24.
5. Kazakova T. G. *J. Phys. A: Math. and Gen.* 2004, vol. 37, pp. 8089–8112.
6. Ormerod C. M., van der Kamp H. Peter, Quispel G. R. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2013, vol. 46, no. 9, p. 23.
7. Hirota R. *J. Phys. Soc. Japan*. 1977, vol. 43, pp. 1423–1433, 2074–2078, 2079–2086.
8. Suris Yu. B. *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*. 2018, vol. 51, no. 33, p. 60.
9. Adler V. E., Shabat A. B., Yamilov R. I. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2000, vol. 125, no. 3, pp. 355–424. [In Russian]
10. Shabat A. B., Yamilov R. I. *Algebra i analiz* [Algebra and analysis]. 1990, vol. 2, no. 2, pp. 377–400. [In Russian]
11. Ramani A., Grammaticos B. *Phys. A*. 1996, vol. 228, no. 1 – 4, pp. 160–171.

---

#### **Казакова Татьяна Георгиевна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра высокопроизводительных  
вычислительных технологий и систем,  
Уфимский государственный  
авиационный технический университет  
(Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12)

E-mail: tg\_kazakova@mail.ru

#### **Kazakova Tat'yana Georgievna**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of high-performance  
computing technologies and systems,  
Ufa State Aviation Technical University  
(12 K. Marksa street, Ufa, Russia)

#### **Саттарова Радмила Рустемовна**

бакалавр, Уфимский государственный  
авиационный технический университет  
(Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12)

E-mail: zakasatt@mail.ru

#### **Sattarova Radmila Rustemovna**

Bachelor, Ufa State Aviation Technical  
University (12 K. Marksa street, Ufa,  
Russia)



**Образец цитирования:**

Казакова, Т. Г. Новый пример конечномерной редукции дискретной цепочки типа цепочки Тоды / Т. Г. Казакова, Р. Р. Саттарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 85–97. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-7.

## О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ «ВОСЬМЕРКА» КУСОЧНО-ГЛАДКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ С СИММЕТРИЕЙ

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Изучение бифуркации в типичных одно- и двухпараметрических семействах кусочно-гладких динамических систем на плоскости представляет значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Этим исследованиям посвящено большое число научных работ. В приложениях часто встречаются динамические системы с симметрией. Однако бифуркации кусочно-гладких систем с симметрией пока изучены мало. Поэтому исследование бифуркаций в типичных семействах таких динамических систем представляется актуальным.

*Материалы и методы.* Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Основной метод состоит в исследовании поведения функций последования и соответствующих функций расхождения при разных значениях параметров.

*Результаты.* Рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей на плоскости, «сшитых» из гладких векторных полей, заданных, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях. Векторные поля семейства предполагаются инвариантными при преобразовании симметрии относительно начала координат. При нулевых значениях параметров векторное поле имеет орбитно устойчивую периодическую траекторию  $\Gamma$ , гомеоморфную «восьмерке», касающуюся в начале координат  $O$  оси  $x$  и сверху и снизу. В случае общего положения описываются бифуркации в окрестности  $U$  контура  $\Gamma$ . Получена бифуркационная диаграмма – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на классы топологической эквивалентности в  $U$  векторных полей семейства.

*Выводы.* Описаны типичные двухпараметрические бифуркации в окрестности рассматриваемой периодической траектории.

**Ключевые слова:** кусочно-гладкое векторное поле, симметрия, периодическая траектория, бифуркация, бифуркационная диаграмма.

V. Sh. Roytenberg

## ON BIFURCATIONS OF A PERIODIC TRAJECTORY “EIGHT” OF A PIECEWISE SMOOTH VECTOR FIELD WITH SYMMETRY

### **Abstract.**

*Background.* The study of bifurcation in typical one- and two-parameter families of piecewise smooth dynamical systems on the plane is of considerable interest, both from a theoretical and applied point of view. A large number of scientific papers are devoted to these studies. In applications, dynamic systems with symmetry

are often found. However, bifurcations of piecewise smooth systems with symmetry have so far been little studied. Therefore, the study of bifurcations in typical families of such dynamical systems seems relevant.

*Materials and methods.* We use methods of the qualitative theory of differential equations. The main method is to study the behavior of Poincaré mappings and the corresponding divergence functions for various parameter values.

*Results.* We consider a two-parameter family of piecewise-smooth vector fields in the plane that are “stitched” from smooth vector fields defined respectively in the upper and lower half-planes. The vector fields of the family are assumed to be invariant at the transformation of symmetry with respect to the origin. At zero values of the parameters, the vector field has an orbital stable periodic trajectory  $\Gamma$ , homeomorphic to the “eight”, tangent to the  $x$  axis at the origin and above and below. In the generic case, bifurcations are described in a neighborhood  $U$  of the contour  $\Gamma$ . A bifurcation diagram is obtained – a partition of a neighborhood of zero on the parameter plane into classes of topological equivalence in  $U$  of vector fields of the family.

*Conclusions.* Generic two-parameter bifurcations in a neighborhood of the considered periodic trajectory are described.

**Keywords:** piecewise smooth vector field, symmetry, periodic trajectory, bifurcation, bifurcation diagram.

### Введение

Исследованию бифуркаций двумерных кусочно-гладких динамических систем посвящено много работ, например книги [1–2] и статьи [3–5]. Динамические системы, моделирующие различные процессы, часто имеют естественную симметрию. В статье [5] рассматривались локальные бифуркации обратимых кусочно-гладких систем. Здесь мы исследуем некоторые бифуркации систем, инвариантных при симметрии плоскости относительно начала координат.

Пусть  $D = (\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}_-^2)$  – разбиение плоскости  $\mathbf{R}^2$  на полуплоскости  $\mathbf{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$  и  $\mathbf{R}_-^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 0\}$ , а  $X^+$  и  $X^-$  – векторные поля класса  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) соответственно в  $\mathbf{R}_+^2$  и  $\mathbf{R}_-^2$ . Кусочно-гладким векторным полем  $X = (X^+, X^-)$  на  $\mathbf{R}^2$  с разбиением  $D$  назовем класс всех (вообще говоря, разрывных в точках оси  $x$ ) векторных полей  $\hat{X}$  на  $\mathbf{R}^2$  таких, что  $\hat{X}(x, y) = X^+(x, y)$  при  $y > 0$  и  $\hat{X}(x, y) = X^-(x, y)$  при  $y < 0$ . Будем рассматривать векторные поля, инвариантные относительно отображения  $S : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ , т.е. такие, что

$$X^-(x, y) = -X^+(-x, -y) \text{ для всех } (x, y) \in \mathbf{R}_-^2. \quad (1)$$

Множество всех таких векторных полей обозначим  $X_S^r$ .

Траектории поля  $X \in X_S^r$  определим согласно Филиппову [1] как траектории дифференциального включения  $(\dot{x}, \dot{y}) \in \chi(x, y)$ , где  $\chi(x, y) = \{\hat{X}(x, y)\}$ , если  $y \neq 0$ , и  $\chi(x, y)$  – выпуклая оболочка векторов  $X^+(x, y)$  и  $X^-(x, y)$ , если  $y = 0$ . Точки  $(x, 0)$ , в которых векторы  $X^+(x, 0)$  и

$X^-(x, 0)$  не касаются оси  $x$  и направлены оба либо внутрь  $\mathbf{R}_+^2$ , либо внутрь  $\mathbf{R}_-^2$  будем называть простыми точками поля.

### 1. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим семейство векторных полей  $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^+, X_\varepsilon^-) \in X_S^r$ , зависящих от параметра  $\varepsilon$ , принадлежащего некоторой окрестности нуля  $E$  в двумерном евклидовом пространстве. Пусть в координатах  $X_\varepsilon^\pm(x, y) = (P^\pm(x, y, \varepsilon), Q^\pm(x, y, \varepsilon))$ , где функции  $P^\pm$  и  $Q^\pm$  принадлежат классу  $C^r$ . Будем предполагать, что поле  $X_0 = (X_0^+, X_0^-)$  в точке  $O = (0, 0)$  удовлетворяет следующим условиям.

**Условие 1.**  $P^+(0, 0, 0) > 0$ ,  $Q^+(0, 0, 0) = 0$ ,  $\partial Q^+(0, 0, 0) / \partial x > 0$ .

Из условия 1 следует, что в точке  $O$  начинается положительная (отрицательная) полутраектория  $L_+^+$  ( $L_+^-$ ) векторного поля  $X_0^+$ , касающаяся в  $O$  оси  $x$ . Ввиду (1)  $L_+^- = S(L_+^+)$  ( $L_+^+ = S(L_+^-)$ ) – положительная (отрицательная) полутраектория векторного поля  $X_0^-$ , касающаяся в  $O$  оси  $x$ .

Предположим, что выполняется и условие 2.

**Условие 2.** Через точку  $O$  проходит периодическая траектория  $\Gamma^+$  векторного поля  $X_0$ , содержащая дуги  $L_+^+$  и  $L_+^-$  и пересекающаяся с  $\mathbf{R}_0^2 \setminus \{O\}$  только в простых точках поля.

Из условия 2 следует, что  $\Gamma^+$  – простая замкнутая кривая. Вследствие симметрии через точку  $O$  проходит и периодическая траектория  $\Gamma^- = S(\Gamma^+)$  векторного поля  $X_0$ , содержащая дуги  $L_+^-$  и  $L_+^+$ , пересекающаяся с  $\mathbf{R}_0^2 \setminus \{O\}$  только в простых точках поля (рис. 1). Тогда  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  – также периодическая траектория.

**Лемма 1.** Существуют такие числа  $0 < u_0 < \bar{u}_0$  и такое  $C^1$ -отображение  $\chi_0^+ : [0, u_0] \rightarrow [0, \bar{u}_0]$ , что  $\chi_0^+(0) = 0$ ,  $\forall u \in [0, u_0]$   $(\chi_0^+)'(u) > 0$ , а положительная полутраектория поля  $X_0$ , начинающаяся в точке  $(u, 0)$ ,  $u \in [0, u_0]$ , следующий раз пересекает дугу  $[0, \bar{u}_0] \times \{0\}$  в точке  $(\chi_0^+(u), 0)$ .

Доказательство леммы приведено в разд. 2.

Обозначим  $\lambda_{\text{int}} := (\chi_0^+)'(0)$ . При  $\lambda_{\text{int}} < 1$  траектории поля  $X_0$ , начинающиеся в точках достаточно малой отрицательной полуокрестности  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ ,  $\omega$ -предельны соответственно к  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  (рис. 1).

Пусть  $\eta : (-1, 1) \rightarrow \text{int } \mathbf{R}_+^2$  – такое  $C^\infty$ -отображение, что  $\forall u \in (-1, 1)$   $\eta'(u) \neq 0$ , дуги  $\eta(-1, 1)$  и  $L_+^+$  пересекаются в единственной точке  $\eta(0)$ , причем репер  $(\eta'(0), X_0^+(\eta(0)))$  положительно ориентирован.

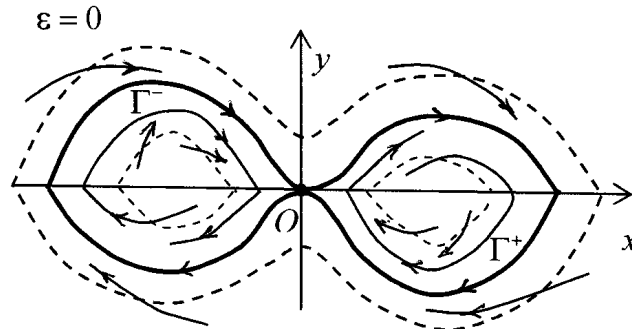


Рис. 1. Траектории поля  $X_0$ ,  $\lambda_{\text{int}} < 1$ ,  $\lambda_{\text{ext}} < 1$

Так как  $\Gamma \setminus \{O\}$  пересекается с осью  $x$  только в простых точках поля, а дуга  $L_+^+ \cup L_-^+$  ( $L_+^- \cup L_-^-$ ) траектории  $\Gamma$  имеет положительную полуокрестность, принадлежащую целиком  $\mathbf{R}_+^2$  ( $\mathbf{R}_-^2$ ), то существует такое  $C^r$ -отображение  $\chi_0^-: [-u_1, 0] \rightarrow (-1, 0]$ , что  $\chi_0^-(0) = 0$ ,  $\forall u \in [-u_1, 0]$   $(\chi_0^-)'(u) > 0$ , а положительная полутраектория поля  $X_0$ , начинающаяся в точке  $\eta(u)$ ,  $u \in [-u_1, 0]$ , следующий раз пересекает дугу  $\eta(-1, 0]$  в точке  $\eta(\chi_0^-(u))$ . Обозначим  $\lambda_{\text{ext}} := (\chi_0^-)'(0)$ . При  $\lambda_{\text{ext}} < 1$  траектории поля  $X_0$ , начинающиеся в точках достаточно малой положительной полуокрестности  $\Gamma$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma$  (рис. 1).

Из условия 1 следует, что существуют число  $a > 0$ , окрестность нуля  $E'$  в  $E$ , и  $C^r$ -функция  $\hat{x}: E' \rightarrow (-a, a)$ ,  $\hat{x}(0) = 0$  такие, что  $\forall (x, y, \epsilon) \in [-a, a] \times [0, a] \times E'$ :

$$P^+(x, y, \epsilon) > 0, \frac{\partial}{\partial x} Q^+(x, y, \epsilon) > 0, \text{sgn} Q^+(x, 0, \epsilon) = \text{sgn}(x - \hat{x}(\epsilon)). \quad (2)$$

Из условий 1 и 2 следует, что найдется такая окрестность нуля  $E'' \subset E'$  в пространстве параметров, что положительная (отрицательная) полутраектория поля  $X_\epsilon^+$ ,  $\epsilon \in E''$ , начинающаяся в точке  $O_\epsilon^+ = (\hat{x}(\epsilon), 0)$  ( $O_\epsilon^- = (-\hat{x}(\epsilon), 0)$ ), пересекает дугу  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(u_+(\epsilon))$  ( $\eta(u_-(\epsilon))$ ), где  $u_\pm(\cdot) \in C^r$ ,  $u_\pm(0) = 0$ . Обозначим  $\hat{u}(\epsilon) := u_+(\epsilon) - u_-(\epsilon)$ . Будем считать, что выполняется следующее условие.

**Условие 3.** Векторы  $\partial \hat{x}(0) / \partial \epsilon$  и  $\partial \hat{u}(0) / \partial \epsilon$  линейно независимы.

Тогда в некоторой окрестности нуля  $E''' \subset E''$  в пространстве параметров можно ввести такие  $C^r$ -координаты  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , что  $\hat{x}(\epsilon) = \epsilon_1$ ,  $\hat{u}(\epsilon) = \epsilon_2$ . Далее мы будем отождествлять точку  $\epsilon \in E'''$  с ее координатной строкой  $\epsilon \equiv (\epsilon_1, \epsilon_2)$  и считать, что  $E''' = (-\delta_1, \delta_1)^2 = (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$ , где  $0 < \delta_1 < a$ .

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1–3 и  $\lambda_{\text{int}} < 1$ ,  $\lambda_{\text{ext}} < 1$ . Тогда существуют окрестность  $U$  периодической траектории  $\Gamma$  и число  $\delta \in (0, \delta_1)$  со следующими свойствами:

1) положительные полутраектории векторных полей  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , начинающиеся в точках  $\partial U$ , входят в  $U$ ;

2) бифуркационная диаграмма семейства  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , в  $U$  представляет собой разбиение области параметров  $(-\delta, \delta)^2$  на множества  $B_0 = \{(0,0)\}$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $i=1,2,\dots,9$  (рис. 2), где

$$E_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), 0 < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}, \quad B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)\},$$

$$E_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)\}, \quad B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)\},$$

$$E_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta\},$$

$$\beta_k : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \quad \beta_k \in C^1, \quad \beta_k(+0) = \beta_k'(+0) = 0, \quad k=1,2, \quad \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$B_3 = \{0\} \times (0, \delta), \quad E_4 = (-\delta, 0) \times (0, \delta), \quad B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\},$$

$$E_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \beta_5(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < 0\} \quad B_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \varepsilon_2 = \beta_5(\varepsilon_1)\},$$

$$E_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \beta_6(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_5(\varepsilon_1)\},$$

$$B_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)\},$$

$$E_7 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \beta_7(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_6(\varepsilon_1)\}, \quad B_7 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \varepsilon_2 = \beta_7(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_j : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_j \in C^1, \quad \beta_j(-0) = \beta_j'(-0) = 0, \quad j=5,6,7,$$

$$\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1) < \beta_5(\varepsilon_1), \quad E_8 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_7(\varepsilon_1)\},$$

$$B_8 = \{0\} \times (-\delta, 0), \quad E_9 = (0, \delta) \times (-\delta, 0), \quad B_9 = (0, \delta) \times \{0\}.$$

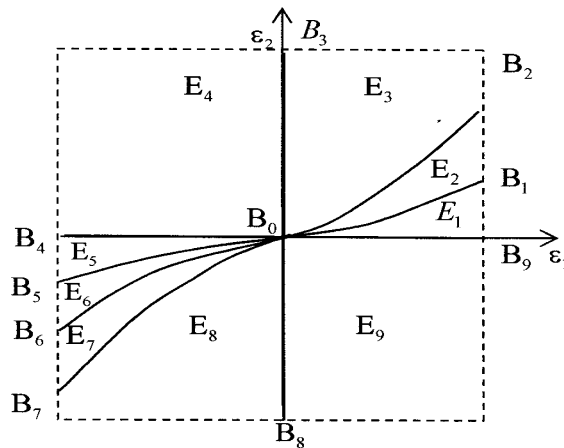


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Схемы фазовых портретов векторных полей  $X_\varepsilon$  в  $U$  имеют вид, изображенный на рис. 3. Векторные поля  $X_\varepsilon$  при  $\varepsilon \in E_i$  – грубые в  $U$ .

Доказательство теоремы приведено в разд. 2–6.

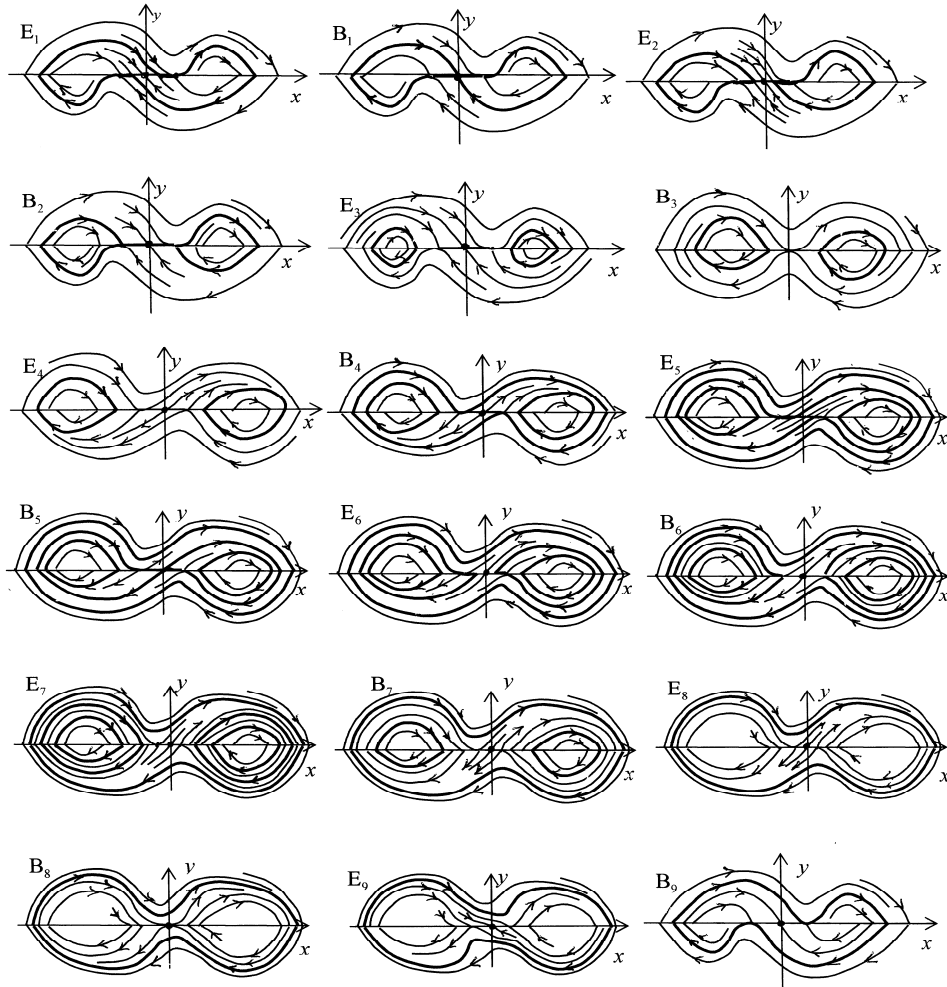


Рис. 3. Перестройки фазовых портретов

**2. Функции соответствия, функции последования и функции расхождения**

**Лемма 2.** Существуют числа  $\bar{u} \in (0, a)$  и  $\delta_2$ ,  $0 < \delta_2 < \min\{\bar{u}, \delta_1\}$ , такие, что положительная (отрицательная) полутраектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ , начинающаяся в точке  $(u, 0)$ ,  $u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$  ( $u \in [-\varepsilon_1, \bar{u}]$ ) как полутраектория поля  $X_\varepsilon^+$  ( $X_\varepsilon^-$ ), первый раз пересекает дугу  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(f_\varepsilon^+(u))$  ( $\eta(f_\varepsilon^-(u))$ ), где для функций соответствия  $f_\varepsilon^\pm$  имеем

$$f_\varepsilon^\pm(u) = u_\pm(\varepsilon) + r_\pm(u, \varepsilon), \tag{3}$$

$$r_\pm(\cdot, \cdot) \in C^r, \quad r_\pm(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = (r_\pm)'_u(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = 0,$$

$$(r_\pm)'_u(u, \varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2, u \in (\pm\varepsilon_1, \bar{u}], \tag{4}$$

$$(r_\pm)''_{uu}(u, \varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2, u \in [\pm\varepsilon_1, \bar{u}]. \tag{5}$$

**Доказательство.** Пусть  $\Pi_a := [-a, a] \times [0, a]$ . Из условия (2) следует, что в  $\Pi_a \times (-\delta_1, \delta_1)^2$  определена функция  $R = Q^+ / P^+$ , а траектории поля  $X_\varepsilon^+$  в  $\Pi_a$  совпадают с интегральными кривыми уравнения  $y' = R(x, y, \varepsilon)$ . Считая числа  $a$  и  $\delta_1$  выбранными достаточно малыми, получим, что для любого  $u \in [\varepsilon_1, a]$  это уравнение имеет решение  $y = Y(x, u, \varepsilon)$ ,  $x \in [u, a]$ , удовлетворяющее начальному условию  $Y(u, u, \varepsilon) = 0$ , при этом  $Y \in C^r$ ,  $0 < Y(x, u, \varepsilon) < a$  для  $x \in (u, a]$ . Обозначим  $\varphi_1(u, \varepsilon) := Y(a, \varepsilon_1, \varepsilon) - Y(a, u, \varepsilon)$ . Мы можем считать, что  $\Pi_a \cap \eta(-1, 1) = \emptyset$ . Если числа  $\bar{v} > 0$ ,  $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ , достаточно малы, то траектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ , начинающаяся в точке  $(Y(a, \varepsilon_1, \varepsilon) - v, 0)$ ,  $v \in [0, \bar{v})$ , первый раз пересекает дугу  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(\varphi_2(v, \varepsilon))$ , где  $\varphi_2(\cdot, \cdot) \in C^r$ ,

$$(\varphi_2)'_v(v, \varepsilon) > 0, \quad \varphi_2(0, \varepsilon) = u_+(\varepsilon). \quad (6)$$

Согласно [6, с. 120] имеем:

$$Y'_u(a, u, \varepsilon) = -R(u, 0, \varepsilon)F(u, \varepsilon), \quad \text{где } F(u, \varepsilon) = \exp \int_u^a R'_y(x, Y(x, u, \varepsilon)) ds. \quad (7)$$

Вследствие (2), где, напомним  $\hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_1$ , имеем  $R(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = Q^+(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = 0$ ,  $R'_x(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = (Q^+)'_x(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) / (P^+(\varepsilon_1, 0, \varepsilon))^2 > 0$ . Отсюда и из (7) получаем  $Y'_u(a, \varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ ,  $Y''_{uu}(a, \varepsilon_1, \varepsilon) = -[R(u, 0, \varepsilon)F'_u(u, \varepsilon) + R'_x(u, 0, \varepsilon)F(u, \varepsilon)]_{u=\varepsilon_1} = -R'_x(\varepsilon_1, 0, \varepsilon)F(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0$ . Поэтому

$$\varphi_1(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0, \quad (\varphi_1)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0, \quad (\varphi_1)''_{uu}(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0. \quad (8)$$

При достаточно малых  $\bar{u} > 0$  и  $\delta_2 \in (0, \bar{u})$  траектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ , начинающаяся в точке  $(u, 0)$ ,  $u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$ , первый раз пересекает дугу  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(f_\varepsilon^+(u))$ , где  $f_\varepsilon^+(u) := \varphi_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$ . Из (6) и (8) следует, что  $f_\varepsilon^+$  удовлетворяет условиям (3)–(5). Функция  $f_\varepsilon^-$  получается аналогично  $f_\varepsilon^+$ . Лемма 2 доказана.

Определим функции последования  $\chi_\varepsilon^+ := (f_\varepsilon^-)^{-1} \circ f_\varepsilon^+$ .

**Доказательство леммы 1.** Для функции последования  $\chi_0^+$  имеем  $\chi_0^+(0) = 0$ . В точках  $u \neq 0$  она дифференцируема и

$$(\chi_0^+)'(u) := \frac{(f_0^+)'(u)}{(f_0^-)'(u)} = \frac{(r_+)'_u(u, 0)}{(r_-)'_u(u, 0)} > 0. \quad \text{Так как } (r_\pm)'_u(0, 0) = 0, \text{ то по правилу}$$

$$\text{Лопиталю } \lim_{u \rightarrow +0} (\chi_0^+)'(u) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{(r_+)'_u(u, 0)}{(r_-)'_u(u, 0)} = \frac{(r_+)'_{uu}(0, 0)}{(r_-)'_{uu}(0, 0)}. \quad \text{Поэтому } \chi_0^+ -$$

$C^1$ -функция на  $[0, \chi_0^-(\bar{u})]$ , причем



$$\lambda_{\text{int}} = (\chi_0^+)'(0) = (r_+)'_{uu}(0,0) / (r_-)'_{uu}(0,0) > 0. \tag{9}$$

**Лемма 3.** Существуют такие числа  $\underline{u} \in (0,1)$  и  $\delta_3 \in (0,\delta_2)$ , что при  $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$   $\tilde{u}(\varepsilon) := f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) > -\underline{u}$ , а положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке  $\eta(u)$  (соответственно,  $S\eta(u)$ ),  $u \in [-\underline{u}, \tilde{u}(\varepsilon)]$ , первый раз пересекает дугу  $S\eta(-1,1)$  (соответственно  $\eta(-1,1)$ ) в точке  $S\eta(g_\varepsilon(u))$  (соответственно  $\eta(g_\varepsilon(u))$ ), где  $g_\varepsilon(u)$  –  $C^r$ -функция от  $(u,\varepsilon)$ ,  $g_\varepsilon(\tilde{u}(\varepsilon)) = u_+(\varepsilon)$ ,

$$0 < (g_\varepsilon)'(u) < 1 \text{ при всех } \varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2, u \in [-\underline{u}, \tilde{u}(\varepsilon)]. \tag{10}$$

**Доказательство.** Так как  $\tilde{u}(0) = 0$ , а периодическая траектория  $\Gamma$ , выходя из точки  $\eta(0)$ , первый раз пересекает дугу  $S\eta(-1,1)$  в точке  $S\eta(0)$ , то найдется такое число  $u_* > 0$ , что положительная полутраектория поля  $X_0$ , начинающаяся в точке  $\eta(u)$  ( $S\eta(u)$ ),  $u \in [-u_*, 0]$ , первый раз пересекает дугу  $S\eta(-1,1)$  ( $\eta(-1,1)$ ) в точке  $S\eta(g_{00}(u))$  ( $\eta(g_{00}(u))$ ), где  $g_{00}(u)$  –  $C^r$ -функция,  $g_{00}(0) = 0$ ,  $g'_{00}(u) > 0$ . Тогда найдется такое число  $\underline{u} \in (0, u_*]$ , что  $g_{00}(g_{00}(u)) = \chi_0^-(u)$  при  $u \in [-\underline{u}, 0]$ . Так как  $[(g_{00})'(0)]^2 = (\chi_0^-)'(0) = \lambda_{\text{ext}} < 1$ , то  $0 < g'_{00}(0) < 1$ . Пусть  $g'_{00}(0) < q < 1$ . Мы можем считать, что  $g'_{00}(u) \leq q$  при всех  $u \in [-\underline{u}, 0]$ . Если число  $\delta_3 \in (0,\delta_2)$  достаточно мало, то для  $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$   $u_-(\varepsilon) = f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) > -\underline{u}$ . Ввиду компактности отрезка  $[-\underline{u}, 0]$  число  $\delta_3$  можно выбрать так, что определено отображение  $\eta(u) \mapsto S\eta(g_\varepsilon(u))$ ,  $u \in [-\underline{u}, \tilde{u}(\varepsilon)]$ , по траекториям  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$ , такое, что  $g_0 = g_{00}$  и выполняется (10).

На отрезке  $[-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]$ , где  $u_*(\varepsilon) = g_\varepsilon^{-1} \circ g_\varepsilon^{-1}(u_+(\varepsilon))$ , определена функция последования  $\chi_\varepsilon^- := g_\varepsilon \circ g_\varepsilon$ .

Определим теперь функции расхождения:

$$d(u,v,\varepsilon) := f_\varepsilon^+(u) - f_\varepsilon^-(v), \quad \varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2, \quad u \in [\varepsilon_1, \bar{u}], \quad v \in [-\varepsilon_1, \bar{u}],$$

$$d_+(u,\varepsilon) := d(u,u,\varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2, \quad u \in [\varepsilon_1, \bar{u}],$$

$$d_-(u,\varepsilon) := \chi_\varepsilon^-(u) - u, \quad \varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2, \quad [-\underline{u}, u_*(\varepsilon)].$$

Их роль следующая. Если  $d(u,v,\varepsilon) = 0$ , то из точки  $(u,0)$  выходит положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , идущая в точку  $(v,0)$ . Если  $d_+(u,\varepsilon) = 0$  (соответственно  $d_-(u,\varepsilon) = 0$ ), то через точку  $(u,0)$  (соответственно  $\eta(u)$ ) проходит периодическая траектория поля  $X_\varepsilon$ .

Вследствие (3) и равенства  $u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon) =: \hat{u}(\varepsilon) = \varepsilon_2$  имеем

$$d(u,v,\varepsilon) = \varepsilon_2 + r_+(u,\varepsilon) - r_-(v,\varepsilon). \tag{11}$$

**Лемма 4.** Числа  $\bar{u}$  и  $\delta_2$ ,  $\underline{u}$  и  $\delta_3$ , определенные в леммах 2 и 3, можно считать выбранными так, что для всех  $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ , где  $0 < \delta_4 \leq \min\{\delta_2, \delta_3\}$ :

$$d'_{\varepsilon_2}(u, v, \varepsilon) > 0 \text{ при } u \in [\varepsilon_1, \bar{u}], v \in [-\varepsilon_1, \bar{u}], \quad (12)$$

$$d_+(\bar{u}, \varepsilon) < 0, (d_+)'''_{uu}(u, \varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [\varepsilon_1, \bar{u}], \quad (13)$$

$$d_-(-\underline{u}, \varepsilon) > 0, (d_-)'_{uu}(u, \varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]. \quad (14)$$

**Доказательство.** Согласно (4)  $r_{\pm}(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ . Следовательно,  $(r_{\pm})'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 0$ , потому  $\bar{u}$  и  $\delta_2$  можно считать выбранными так, что

$$|(r_{\pm})'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon)| < 1/3 \text{ для } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2, u \in [\pm\varepsilon_1, \bar{u}]. \quad (15)$$

Из (11)  $d'_{\varepsilon_2}(u, v, \varepsilon) = 1 + (r_+)'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) - (r_-)'_{\varepsilon_2}(v, \varepsilon)$ . Отсюда и из (15) получаем (12).

Вследствие (11)  $(d_+)'''_{uu}(0, 0) = (r_+)'''_{uu}(0, 0) - (r_-)'''_{uu}(0, 0)$ . Из (9) и условия  $\lambda_{\text{int}} < 1$  получаем  $(d_+)'''_{uu}(0, 0) < 0$ , а потому и второе неравенство в (13) при достаточно малых  $\bar{u}$  и  $\delta_2$ . Ввиду (11) и (4)  $d_+(0, 0) = (d_+)'_{uu}(0, 0) = 0$ . Отсюда и из второго неравенства в (13) следует, что  $d_+(\bar{u}, 0) < 0$ . Потому  $\bar{u}$  и  $\delta_2$  можно считать выбранными так, что при  $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$  выполняется первое неравенство в (13).

Неравенства (14) следуют из определения  $d_-$  и (10).

### 3. Бифуркационные кривые

**Лемма 5.** Существуют число  $\delta \in (0, \delta_4)$  и  $C^r$ -функции  $\beta_i : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, \delta)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta_j : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$ ,  $j = 5, 6$ , такие, что  $\beta_k(0) = \beta'_k(0) = 0$  для  $k = 1, 2, 5, 6$ :

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \quad 0 < \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1), \quad \forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0) \quad \beta_6(\varepsilon_1) < \beta_5(\varepsilon_1) < 0,$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta) \quad \text{sgn } d(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_1(\varepsilon_1)), \quad (16)$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta) \quad \text{sgn } d(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)), \quad (17)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad \text{sgn } d(0, -\varepsilon_1, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_5(\varepsilon_1)), \quad (18)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad \text{sgn } d(-\varepsilon_1, -\varepsilon_1, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_6(\varepsilon_1)). \quad (19)$$

**Доказательство.** Согласно теореме Уитни [7, с. 587–597] функцию  $d$  можно продолжить до  $C^r$ -функции  $\bar{d}$ , определенной на  $[-\bar{u}, \bar{u}] \times [-\bar{u}, \bar{u}] \times (-\delta_2, \delta_2)^2$ . Из (11) и (4) получаем при  $\varepsilon_1 \geq 0$   $\bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = \varepsilon_2 - r_-(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \int_0^1 (r_-)'_{uu}(-t\varepsilon_1, \varepsilon) dt$ . Отсюда, из (4) и (5) имеем  $\bar{d}(0, 0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -(r_-)'_{uu}(0, 0) = 0$ . Теперь,

используя теорему о неявной функции, получаем существование  $C^r$ -функции  $\beta_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$ ,  $\beta_1(0) = \beta_1'(0) = 0$  такой, что  $\text{sgn } \bar{d}(0, \varepsilon_1, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_1(\varepsilon_1))$  для  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ . Поскольку при  $\varepsilon_1 > 0$   $\bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = d(\varepsilon_1, 0, \varepsilon)$ , то имеем и (16). Тогда при  $\varepsilon_1 > 0$   $\text{sgn } \beta_1(\varepsilon_1) = -\text{sgn } d(\varepsilon_1, 0, (\varepsilon_1, 0)) = \text{sgn } r_-(0, (\varepsilon_1, 0))$ , и потому  $\beta_1(\varepsilon_1) > 0$ .

Аналогично получаем существование функции  $\beta_2, \beta_5, \beta_6$ .

**Лемма 6.** Числа  $\bar{u}$  и  $\delta$  можно считать выбранными так, что существуют  $C^r$ -функции  $m : (-\delta, \delta)^2 \rightarrow (-\bar{u}, \bar{u})$  и  $\beta_7 : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$  такие, что  $m(0) = 0$ ,  $\beta_7(0) = 0$ ,  $\beta_7'(0) = 0$ ,  $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$   $\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1)$ ,  $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2$   $m(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \bar{u})$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2 \quad \forall u \in [-\varepsilon_1, \bar{u}] \quad \text{sgn}(d_+)'_u(u, \varepsilon) = \text{sgn}(m(\varepsilon) - u), \quad (20)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2 \quad \text{sgn } d_+(m(\varepsilon), \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_7(\varepsilon_1)). \quad (21)$$

**Доказательство.** Пусть  $\bar{d}_+(u, \varepsilon) := \bar{d}(u, u, \varepsilon)$ . Так как  $(\bar{d}_+)'_u(0, 0) = (d_+)'_u(0, 0) = 0$ ,  $(\bar{d}_+)'_{uu}(0, 0) = (d_+)'_{uu}(0, 0) \neq 0$ , то числа  $\bar{u}$  и  $\delta$  можно считать выбранными так, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \quad \forall u \in [-\bar{u}, \bar{u}] \quad \text{sgn}(\bar{d}_+)'_u(u, \varepsilon) = \text{sgn}(m(\varepsilon) - u), \quad (22)$$

где  $m : (-\delta, \delta)^2 \rightarrow (-\bar{u}, \bar{u})$  –  $C^r$ -функция,  $m(0) = 0$ . Пусть  $M(\varepsilon) := \bar{d}_+(m(\varepsilon), \varepsilon)$ . Так как  $M(0) = 0$ , а ввиду равенства

$$M'_{\varepsilon_k}(0) = [(\bar{d}_+)'_u(u, \varepsilon)m'_{\varepsilon_k}(\varepsilon) + (\bar{d}_+)'_{\varepsilon_k}(u, \varepsilon)] \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ u=m(0)=0}} = (d_+)'_{\varepsilon_k}(0, 0), \quad k = 1, 2,$$

(11) и (4)  $M'_{\varepsilon_2}(0) = 1$ ,  $M'_{\varepsilon_1}(0) = 0$ , то  $\delta$  можно считать столь малым, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \quad \text{sgn } M(\varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_7(\varepsilon_1)), \quad (23)$$

где  $\beta_7 : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$  –  $C^r$ -функция,  $\beta_7(0) = 0$ ,  $\beta_7'(0) = 0$ . Из (11) и (4) получаем  $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2$   $(d_+)'_u(-\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$ . Поэтому  $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2$   $m(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \bar{u})$ ,  $M(\varepsilon) = d_+(m(\varepsilon), \varepsilon)$  и (20) и (21) следует из (22) и (23). Ввиду (19) при  $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)$   $d_+(-\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ . Теперь из (20) получаем  $M(\varepsilon_1, \beta_6(\varepsilon_1)) > 0$ . Отсюда и из (21) имеем  $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$   $\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1)$ .

#### 4. Особые точки на линии разрыва

Обозначим  $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$  отрезок оси  $x$  между точками  $O_\varepsilon^-$  и  $O_\varepsilon^+$  при  $\varepsilon_1 \neq 0$ . Если точка  $(x, 0) \in [O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$ , то в выпуклой оболочке векторов  $X_\varepsilon^-(x, 0)$  и  $X_\varepsilon^+(x, 0)$  существует единственный вектор  $X_\varepsilon^0(x, 0) = (P^0(x, \varepsilon), 0)$ , касатель-

ный к  $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$ . Из (2) и (1) согласно [1, с. ] следует, что  $P^0(x, \varepsilon)$  обращается в нуль только при  $x=0$ , в случае  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_1 < 0$ )  $(P^0)'_x(0, \varepsilon) > 0$  ( $(P^0)'_x(0, \varepsilon) < 0$ ), т.е.  $O$  – грубая седловая особая точка поля  $X_\varepsilon$  класса 1б, а дуги  $[O_\varepsilon^- O] = [-\varepsilon_1, 0] \times \{0\}$  и  $(OO_\varepsilon^+) = (0, \varepsilon_1] \times \{0\}$  принадлежат выходящим (входящим) сепаратрисам точки  $O$ .

### 5. Окрестность контура $\Gamma$

Так как  $\chi_0^+(\bar{u}) < \bar{u}$ , а  $\chi_0^-(u) > u$ , то аналогично [5] можно построить окрестность  $U$  контура  $\Gamma$ , не содержащую особых точек векторных полей  $X_0^\pm$ , с границей  $\partial U$ , состоящей из простых замкнутых кусочно-гладких кривых  $\gamma_{\text{int}}^+$ ,  $\gamma_{\text{int}}^- = S(\gamma_{\text{int}}^+)$  и  $\gamma_{\text{ext}}$ , пересекающихся соответственно с дугой  $[-\bar{u}, \bar{u}] \times \{0\}$  и дугой  $\eta[-u, u]$  в единственной точке, и выбрать число  $\delta$  так, что в точках  $\partial U$  траектории поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , входят внутрь  $U$  с дугой  $\eta[-u, u]$  в единственной точке  $\eta(\chi_0^-(u))$ , а векторные поля  $X_\varepsilon^\pm$  не имеют в  $U \cap \mathbf{R}_\pm^2$  особых точек. Тогда любая положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , начинающаяся в  $U$ , пересекает одну из дуг  $[-\bar{u}, \bar{u}] \times \{0\}$  или  $\eta[-u, u]$ , а любая отрицательная полутраектория либо пересекает одну из этих дуг, либо выходит из  $U$ .

### 6. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов

Определим множества  $E_i$  и  $B_i$  так, как указано в формулировке теоремы.

Пусть  $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2$ . Так как

$$d(\varepsilon_1, -\varepsilon_1, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=0} = [f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) - f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)] \Big|_{\varepsilon_2=0} = 0,$$

то с учетом (12) и (17) получаем, что  $f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) < f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < f_\varepsilon^-(\varepsilon_1)$ , и потому  $-\varepsilon_1 < \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < \varepsilon_1$ . Таким образом, положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , выходящая из точки  $O_\varepsilon^+$ , содержит простую дугу  $\widehat{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$  с концами в точках  $O_\varepsilon^+$  и  $N_\varepsilon = (\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1), 0)$ . Согласно (17)  $d_+(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0$ . Из (3) и (4) получаем  $(d_+)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0$ . Поскольку, кроме того, имеем (5), то при всех  $u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$   $d_+(u, \varepsilon) < 0$ , и потому  $\chi_\varepsilon^+(u) < u$ . Отсюда следует, при некотором  $m \in \mathbf{N}$   $-\varepsilon_1 < (\chi_\varepsilon^+)^m(u) < \varepsilon_1$ , т.е. все положительные полутраектории, начинающиеся в точках дуги  $[\varepsilon_1, \bar{u}] \times \{0\}$ , а в силу симметрии и дуги  $[-\bar{u}, -\varepsilon_1] \times \{0\}$ , пересекаются с дугой  $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\}$ . При  $\varepsilon \in E_1$  вследствие (16)  $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < f_\varepsilon^-(0)$ , и потому  $-\varepsilon_1 < \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < 0$ . Пусть дуга  $\widehat{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-}$  – объединение дуг  $\widehat{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$  и  $[-\varepsilon_1, \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)] \times \{0\}$ . Тогда  $\Gamma_\varepsilon = \widehat{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-} \cup S(\widehat{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-})$  – периодическая траектория

поля  $X_\varepsilon$ , являющаяся простой замкнутой кривой. Если  $\varepsilon \in B_1$ , то  $N_\varepsilon = O$ , а дуга  $\overline{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$  ( $S(\overline{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon})$ ) – положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке  $O_\varepsilon^+$  ( $O_\varepsilon^-$ ). При  $\varepsilon \in E_2$  получаем  $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) > f_\varepsilon^-(0)$ , и потому  $0 < \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < \varepsilon_1$ . В этом случае кривая  $\Gamma_\varepsilon^+$  – объединение дуг  $\overline{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$  и  $[\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$  является периодической траекторией поля  $X_\varepsilon$ . Но тогда  $\Gamma_\varepsilon^- = S(\Gamma_\varepsilon^+)$  также периодическая траектория  $X_\varepsilon$ .

Так как все положительные полутраектории, начинающиеся в точках дуг  $[\varepsilon_1, \bar{u}] \times \{0\}$  и  $[-\bar{u}, \varepsilon_1] \times \{0\}$ , пересекаются с дугой  $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\}$ , то при  $\varepsilon \in E_1$  ( $\varepsilon \in E_2$ ) все они, за исключением одной, входящей в точку  $O$ , начиная с некоторого момента времени совпадают с  $\Gamma_\varepsilon$  (с  $\Gamma_\varepsilon^+$  или с  $\Gamma_\varepsilon^-$ ), а при  $\varepsilon \in B_1$  все они начиная с некоторого момента времени совпадают с точкой  $O$ .

При всех  $\varepsilon \in (0, \delta)^2$   $\chi_\varepsilon^-(u_*(\varepsilon)) = u_+(\varepsilon) > u_-(\varepsilon) > u_*(\varepsilon)$ . Учитывая (14), получаем для любого  $u \in [-u_-, u_*(\varepsilon)]$   $\chi_\varepsilon^-(u) > u$  и при некотором  $m \in \mathbb{N}$  либо (i)  $u_*(\varepsilon) < (\chi_\varepsilon^-)^m(u) \leq u_-(\varepsilon)$  либо (ii)  $u_-(\varepsilon) < (\chi_\varepsilon^-)^m(u) \leq u_+(\varepsilon)$ . В случае (i) определено  $(f_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\chi_\varepsilon^-)^m(u)$ , а в случае (ii) определено  $(f_\varepsilon^-)^{-1} \circ g_\varepsilon \circ (\chi_\varepsilon^-)^m(u)$ . Траектория, начинающаяся в точке  $\eta(u)$ , пересекает в случае (i) дугу  $[-\varepsilon_1, \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)] \times \{0\}$ , а в случае (ii) дугу  $[-\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$ , и потому начиная с некоторого момента времени совпадает с  $\Gamma_\varepsilon$  при  $\varepsilon \in E_1$ , с  $\Gamma_\varepsilon^+$  или с  $\Gamma_\varepsilon^-$  при  $\varepsilon \in E_2$  и с точкой  $O$  при  $\varepsilon \in B_1$ .

Пусть  $\varepsilon \in B_2$ . Тогда  $\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$  и при всех  $u \in (\varepsilon_1, \bar{u}]$   $\chi_\varepsilon^+(u) < u$ . Поэтому через точку  $O_\varepsilon^+$  ( $O_\varepsilon^-$ ) проходит периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ) поля  $X_\varepsilon$ , а траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (\varepsilon_1, \bar{u}]$  ( $u \in (-\bar{u}, -\varepsilon_1]$ ),  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ). Остальные траектории поля  $X_\varepsilon$  ведут себя так же, как в случае  $\varepsilon \in E_1$ .

При  $\varepsilon \in E_3$  из (12), а при  $\varepsilon \in B_3$  из (11) и (4) следует, что  $d_+(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$ . В обоих случаях  $d_+(\cdot, \varepsilon)$  имеет единственный нуль  $\hat{u}(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \bar{u})$ , при этом  $(d_+)'_{\hat{u}}(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ . Тогда через точку  $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$  ( $(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$ ) проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), а все траектории, пересекающиеся с дугой  $(0, \bar{u}] \times \{0\}$  ( $[-\bar{u}, 0) \times \{0\}$ ),  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ). Как и в случае  $\varepsilon \in E_1$ , получаем, что все остальные траектории пересекаются либо с дугой  $(0, \chi_\varepsilon^+(0)) \times \{0\}$  или с дугой  $(-\chi_\varepsilon^+(0), 0) \times \{0\}$  или проходят через точку  $O$ . В первых двух случаях они  $\omega$ -предельны соответственно к  $\Gamma_\varepsilon^+$  или  $\Gamma_\varepsilon^-$ . Через точку  $O$  проходят две траектории, одна  $\omega$ -предельна к  $\Gamma_\varepsilon^+$ , а другая к  $\Gamma_\varepsilon^-$ .

Пусть  $\varepsilon \in E_4$ . Тогда для всех  $u \in [\varepsilon_1, -\varepsilon_1]$   $d_+(u, \varepsilon) < 0$ . Как и в случае  $\varepsilon \in B_3$  получаем, что  $d_+(\cdot, \varepsilon)$  имеет единственный нуль  $\hat{u}(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \bar{u})$ , при этом  $(d_+)'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ . Через точку  $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$  ( $(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$ ) проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), а траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (-\varepsilon_1, \bar{u}]$  ( $u \in (-\bar{u}, \varepsilon_1]$ ),  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ). Отрицательные полутраектории, начинающиеся в точках неустойчивой линейной особенности  $(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) \times \{0\}$   $\alpha$ -предельны к точке  $O$ , а положительные полутраектории, начинающиеся в точках  $(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) \times \{0\}$ , как полутраектории поля  $X_\varepsilon^+$  ( $X_\varepsilon^-$ ),  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ). Аналогично случаю  $\varepsilon \in E_2$  получаем, что траектории, пересекающие дугу  $\eta([-u, u_*(\varepsilon)])$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  или  $\Gamma_\varepsilon^-$ .

Пусть  $\varepsilon \in B_4$ . Аналогично случаю  $\varepsilon \in E_4$ , имеем гиперболическую периодическую траекторию  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), к которой  $\omega$ -предельны траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (-\varepsilon_1, \bar{u}]$  ( $u \in (-\bar{u}, \varepsilon_1]$ ), и траектории, начинающиеся в точках дуги  $[\varepsilon_1, -\varepsilon_1] \times \{0\}$  как траектории поля  $X_\varepsilon^+$  ( $X_\varepsilon^-$ ). Ввиду (11) и (4) через точки  $O_\varepsilon^+$  и  $O_\varepsilon^-$  проходит периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $u_*(\varepsilon) = u_+(\varepsilon) = u_-(\varepsilon)$ ,  $\chi_\varepsilon^-(u_*(\varepsilon)) = u_*(\varepsilon)$ . Из (14) получаем, что  $(\chi_\varepsilon^-)^m(u) \uparrow u_*(\varepsilon)$  при  $u \in [-u, u_*(\varepsilon)]$ , т.е. все траектории, пересекающие дугу  $\eta[-u, u_*(\varepsilon)]$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$ .

При всех  $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, 0)$  функция последования  $\chi_\varepsilon^-$  определена на  $u \in [-u, u_-(\varepsilon)]$  и  $\chi_\varepsilon^-(u_-(\varepsilon)) < u_-(\varepsilon)$ . Теперь из (14) следует, что  $\chi_\varepsilon^-$  имеет на  $[-u, u_-(\varepsilon)]$  единственную (устойчивую) неподвижную точку  $u_0(\varepsilon) \in (-u, u_-(\varepsilon))$ . Через точку  $\eta(u_0(\varepsilon))$  проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon$ , к которой  $\omega$ -предельны все траектории, пересекающие дугу  $\eta[-u, u_-(\varepsilon)]$ .

При  $\varepsilon \in E_5 \cup B_5 \cup E_6$  из (11), (4) и (19) следует, что  $\varepsilon_1 < (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1) < -\varepsilon_1$ . Поэтому отрицательная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , выходящая из точки  $O_\varepsilon^-$ , содержит простую дугу  $\overline{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$  с концами в точках  $O_\varepsilon^-$  и  $M_\varepsilon = ((\chi_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1), 0)$ . Как и при  $\varepsilon \in E_4$ , получаем, что существует устойчивая гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), проходящая через точку дуги  $(-\varepsilon_1, \bar{u}) \times \{0\}$  ( $(-\bar{u}, \varepsilon_1) \times \{0\}$ ), к которой  $\omega$ -предельны траектории, начинающиеся в точках дуги  $((\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1), \bar{u}) \times \{0\}$  ( $(-\bar{u}, -(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)) \times \{0\}$ ) как траектории поля  $X_\varepsilon^+$  ( $X_\varepsilon^-$ ). Траектории, начинающиеся в точках дуги  $[\varepsilon_1, (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)) \times \{0\}$  ( $[-(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1), -\varepsilon_1) \times \{0\}$ ) как

траектории поля  $X_\varepsilon^+$  ( $X_\varepsilon^-$ ), пересекают дугу  $\eta(u_-(\varepsilon), \bar{u})$  ( $S\eta(u_-(\varepsilon), \bar{u})$ ) и потому  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon \in E_5$ . Из (18) следует  $f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) < f_\varepsilon^+(0)$ , и потому  $\varepsilon_1 < (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1) < 0$ . Пусть дуга  $\overline{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+}$  – объединение дуг  $\overline{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$  и  $[\varepsilon_1, (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)] \times \{0\}$ . Тогда  $\Gamma_\varepsilon^u = \overline{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+} \cup S(\overline{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+})$  – периодическая траектория поля  $X_\varepsilon$ .

При  $\varepsilon \in B_5$  из (18) имеем  $(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1) = 0$  и  $M_\varepsilon = O$ . Поэтому  $\overline{O_\varepsilon^- M_\varepsilon} \cup (0, -\varepsilon_1] \times \{0\}$  ( $\overline{O_\varepsilon^- O} \cup (\varepsilon_1, 0) \times \{0\}$ ) является траекторией поля  $X_\varepsilon$ ,  $\omega$ -предельной к  $O$ .

Пусть  $\varepsilon \in E_6$ . Ввиду (18)  $0 < (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1) < -\varepsilon_1$ . Простая замкнутая кривая  $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$  – объединение дуг  $\overline{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$  и  $[(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1), -\varepsilon_1] \times \{0\}$  – является периодической траекторией поля  $X_\varepsilon$ . Но тогда  $\Gamma_\varepsilon^{-,u} = S(\Gamma_\varepsilon^{+,u})$  также периодическая траектория поля  $X_\varepsilon$ .

При  $\varepsilon \in B_6$  из (19) и (21)  $d_+(-\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ ,  $d_+(m(\varepsilon), \varepsilon)|_{\varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)} > 0$ . Отсюда, из (20) и (13) получаем, что  $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $(-\varepsilon_1, \bar{u})$  единственный нуль  $\hat{u}(\varepsilon)$ , при этом  $d'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ . Через точки  $O_\varepsilon^-$  и  $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$  проходят периодические траектории, соответственно  $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$  и  $\Gamma_\varepsilon^+$ , поля  $X_\varepsilon$ , причем  $\Gamma_\varepsilon^+$  – устойчивая гиперболическая траектория, а траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$ ,  $u \in (-\varepsilon_1, \bar{u})$ ,  $u \neq \hat{u}(\varepsilon)$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$ . В силу симметрии через точки  $O_\varepsilon^-$  и  $(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$  проходят периодические траектории, соответственно  $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$  и  $\Gamma_\varepsilon^-$ , поля  $X_\varepsilon$ , причем  $\Gamma_\varepsilon^-$  – устойчивая гиперболическая траектория, а траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$ ,  $u \in (-\bar{u}, \varepsilon_1)$ ,  $u \neq -\hat{u}(\varepsilon)$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^-$ .

Пусть  $\varepsilon \in E_7$ . Из (13), (19)–(21) получаем, что  $d_+(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $(-\varepsilon_1, \bar{u})$  два нуля  $\hat{u}_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $-\varepsilon_1 < \hat{u}_1(\varepsilon) < \hat{u}_2(\varepsilon) < \bar{u}$ ,  $d'_u(\hat{u}_1(\varepsilon), \varepsilon) > 0$ ,  $d'_u(\hat{u}_2(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ . Таким образом, через точку  $(\hat{u}_1(\varepsilon), 0)$  ( $(\hat{u}_2(\varepsilon), 0)$ ) проходит неустойчивая (устойчивая) гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$  ( $\Gamma_\varepsilon^+$ ), траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (\hat{u}_1(\varepsilon), \hat{u}_2(\varepsilon))$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  и  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$  при  $u \in (-\varepsilon_1, \hat{u}_1(\varepsilon))$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$  и  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$ , при  $u \in (\hat{u}_1(\varepsilon), \bar{u}]$   $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  и выходят из  $U$  при убывании времени. В силу симметрии через точку  $(-\hat{u}_1(\varepsilon), 0)$  ( $(-\hat{u}_2(\varepsilon), 0)$ ) проходит неустойчивая (устойчивая) гиперболическая периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (-\hat{u}_2(\varepsilon), -\hat{u}_1(\varepsilon))$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^-$  и  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$  при

$u \in (-\hat{u}_1(\varepsilon), \varepsilon_1)$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$  и  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$ , при  $u \in (-\bar{u}, -\hat{u}_2(\varepsilon))$   $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^-$  и выходят из  $U$  при убывании времени.

Пусть  $\varepsilon \in B_7$ . Тогда  $d_+(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $(-\varepsilon_1, \bar{u})$  единственный нуль  $\hat{u}(\varepsilon)$ , а его кратность равна 2. Через точку  $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$  ( $(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$ ) проходит двойной цикл  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ); траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$  при  $u \in (\hat{u}(\varepsilon), \bar{u})$  (при  $u \in (-\bar{u}, -\hat{u}(\varepsilon))$ ),  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ), выходят из  $U$  при убывании времени, при  $u \in (-\varepsilon_1, \hat{u}(\varepsilon))$  (при  $u \in (-\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon_1)$ )  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon^+$  ( $\Gamma_\varepsilon^-$ ) и  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$ .

При  $\varepsilon \in E_8$  ввиду (21)  $\forall u \in [-\varepsilon_1, \bar{u}] d_+(u, \varepsilon) < 0$ . При  $\varepsilon \in B_8$ ,  $\varepsilon \in E_9$  и  $\varepsilon \in B_9$  имеем  $d_+(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 - r_2(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0$  ( $d_+'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) = -(r_2)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) \leq 0$ ). Отсюда, из (5) получаем  $\forall u \in [\varepsilon_1, \bar{u}] d_+(u, \varepsilon) < 0$ . Поэтому при  $\varepsilon \in E_8$ ,  $\varepsilon \in B_8$  и  $\varepsilon \in E_9$  траектории, проходящие через точки  $(u, 0)$ ,  $|\varepsilon_1| \leq |u| \leq \bar{u}$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$ . При  $\varepsilon \in B_9$  через точки  $O_\varepsilon^+$  и  $O_\varepsilon^-$  проходит периодическая траектория  $\Gamma_\varepsilon$ . Все остальные траектории, за исключением точки  $O$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_\varepsilon$ .

Грубость векторных полей  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) в  $U$  следует из полученного описания траекторий в  $U$  и достаточных условий грубости [1].

#### Библиографический список

1. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985. – 224 с.
2. Simpson, D. J. W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems / D. J. W. Simpson. – World Scientific, 2010. – 238 p.
3. Guardia, M. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems / M. Guardia, T. M. Seara, M. A Teixeira // J. of Differential Equations. – 2011. – Vol. 250, № 4 – P. 1967–2023.
4. Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы седла кусочно-гладкой динамической системы / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1. – С. 36–50.
5. Ройтенберг, В. Ш. Локальные бифуркации кусочно-гладких обратимых динамических систем на плоскости / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое моделирование. – 2020. – № 1. – С. 1–15.
6. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Мир, 1970. – 720 с.
7. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Физматгиз. – 1962. – Т. 1. – 607 с.

#### References

1. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow: Nauka, 1985, 224 p. [In Russian]
2. Simpson D. J. W. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems*. Word Scientific, 2010, 238 p.
3. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. *J. of Differential Equations*. 2011, vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023.



4. Roytenberg V. Sh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2020, no. 1, pp. 36–50. [In Russian]
5. Roytenberg V. Sh. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and mathematical modelling]. 2020, no. 1, pp. 1–15. [In Russian]
6. Khartman F. *Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow: Mir, 1970, 720 p. [In Russian]
7. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Differential and integral calculus course]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, vol. 1, 607 p. [In Russian]

---

**Ройтенберг Владимир Шлеймович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра высшей математики,  
Ярославский государственный  
технический университет (Россия,  
г. Ярославль, Московский проспект, 88)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

**Roytenberg Vladimir Shleymovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of higher mathematics,  
Yaroslavl State Technical University  
(88 Moskovsky avenue, Yaroslavl, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 98–113. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-8.

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЫТЕКАЮЩИХ ТЕ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Цель работы – численное исследование задачи распространения вытекающих ТЕ-электромагнитных волн многослойной регулярной волноведущей структуры.

*Материалы и методы.* Для получения численного решения задачи применяется метод пристрелки по параметру.

*Результаты.* Разработан и реализован численный метод решения задачи о распространении вытекающих ТЕ-поляризованных волн в многослойном волноводе кругового сечения, проведен ряд численных экспериментов.

*Вывод.* Указанный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн.

**Ключевые слова:** задача распространения электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, многослойный волновод, метод пристрелки.

*A. O. Lapich, E. Yu. Smol'kin, A. S. Shutkov, M. O. Snegur*

## A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF PROPAGATION OF OUTLETING TE-POLARIZED WAVES IN A MULTILAYER CIRCULAR WAVEGUIDE

### Abstract.

*Background.* The aim of this work is to numerical study the problem propagation of leaky TE-electromagnetic waves a multilayer regular waveguide structure.

*Material and methods.* The problem boils down to solving the eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations. In order to obtain a numerical solution to the problem, the parameter shooting method is used.

*Results.* A numerical method for solving the propagation problem of an electromagnetic wave in waveguide was developed and implemented, and several numerical experiments were carried out.

*Conclusions.* The proposed numerical method is an effective way to find an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-51004.

© Лапич А. О., Смолькин Е. Ю., Шутков А. С., Снегур М. О., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

**Keywords:** propagation problem of electromagnetic waves, TE-waves, Maxwell's equation, differential equations, multilayer waveguide, shooting method.

### Введение

Задачи, описывающие распространение электромагнитных волн в волноведущих структурах, занимают обширную часть в электродинамике. С развитием радиотехники и применением волноводов сложных поперечных сечений в качестве волноведущих структур, стало необходимо построение новых математических моделей распространения электромагнитных волн. Появилась необходимость в изучении новых типов задач, особенностью которых была сложная структура граничных незамкнутых поверхностей, заполненных неоднородным диэлектриком и имеющих бесконечно тонкие металлические ребра (пластины) в структуре [1–5].

В данной работе изучаются ТЕ-волны, распространяющиеся в многослойном волноводе. Произведен расчет действительных постоянных распространения. Для неоднородного волновода явное дисперсионное уравнение недоступно, и численное исследование спектра собственных значений может быть выполнено только специальным методом, разработанным в этой работе. Проведенные эксперименты подтвердили правильность реализации данного метода, его сходимости и эффективность.

### 1. Постановка задачи

Имеем трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . Пространство заполнено изотропной средой и имеет постоянную диэлектрическую и магнитную проницаемости  $\varepsilon_c \varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $\mu = \mu_0$ , где  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. В это пространство помещен цилиндрический диэлектрический многослойный волновод кругового сечения

$$W := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \\ \cup \{(\rho, \varphi, z) : r_1 \leq \rho \leq r_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \dots \cup \{(\rho, \varphi, z) : r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей линией, параллельной оси  $Oz$ .

Волновод неограниченно продолжается в направлении  $z$ . Сечением волновода, перпендикулярным его оси, являются концентрические окружности радиусов  $r_1, r_2, \dots, r_n$ ; т.е. волновод является  $n$ -слойным (рис. 1).

Комплексные амплитуды  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  монохроматического электромагнитного поля должны удовлетворять гармоническим по времени уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T, \quad (2)$$

условиям непрерывности касательных компонент поля на границах раздела (на границе волновода)  $\rho = r_1, \dots, \rho = r_n$  и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле растёт при  $\rho \rightarrow \infty$ ;  $\omega$  – круговая частота. Всюду  $(\cdot)^T$  обозначает операцию транспонирования. Решения уравнений Максвелла ищутся во всем пространстве.

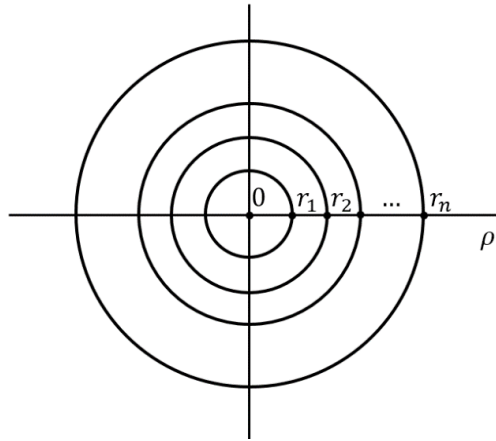


Рис. 1. Поперечное сечение волновода  $W$

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$ , где

$$\tilde{\varepsilon} \begin{cases} \varepsilon_c, & 0 \leq \rho \leq r_1, \\ \varepsilon_1(\rho), & r_1 \leq \rho \leq r_2, \\ \varepsilon_2(\rho), & r_2 \leq \rho \leq r_3, \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1}(\rho), & r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, \\ \varepsilon_c, & \rho \geq r_n. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим ТЕ-волны в гармоническом режиме:

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, E_\varphi, 0)^T,$$

$$\mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (H_\rho, 0, H_z)^T,$$

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho, \varphi, z), H_\rho = H_\rho(\rho, \varphi, z), H_z = H_z(\rho, \varphi, z).$$

**Определение 1.** ТЕ-волны – электромагнитные волны, в которых вектор электрического поля  $\tilde{\mathbf{E}}$  ортогонален волновому вектору. ТЕ-волны относятся к классу плоских монохроматических волн. ТЕ-волны также называют волнами магнитного типа или Н-волнами.

Подставив поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в уравнения Максвелла (1), получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega\mu H_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} = i\omega\mu H_z. \end{array} \right.$$

Из первого и третьего уравнений видно, что компоненты поля  $H_z$  и  $H_\rho$  не зависят от  $\varphi$ ; поскольку  $E_\varphi$  можно выразить через  $H_z$  и  $H_\rho$ , то  $E_\varphi$  также не зависит от  $\varphi$ .

**Замечание 1.** Выбирая для компонент зависимость  $e^{i\varphi n}$  по переменной  $\varphi$ , где  $n$  – целое число, и взяв  $n = 0$ , получим волны, не зависящие от  $\varphi$ .

Распространяющиеся волны, текущие по оси  $Oz$  волновода  $W$ , имеют гармоническую зависимость от  $z$ . Значит, компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно представить в следующем виде:

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho) e^{i\gamma z}, H_\rho = H_\rho(\rho) e^{i\gamma z}, H_z = H_z(\rho) e^{i\gamma z},$$

где  $\gamma$  – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Рассмотренная выше система принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma H_\rho(\rho) - (H_z(\rho))' = -i\omega\varepsilon E_\varphi(\rho), \\ i\gamma E_\varphi(\rho) = -i\omega\mu H_\rho(\rho), \\ \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))' = i\omega\mu H_z(\rho), \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\rho}$ .

Из второго и третьего уравнения системы (4) находим

$$H_z(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))', H_\rho(\rho) = -\frac{\gamma}{\omega\mu} E_\varphi(\rho).$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (4), получаем

$$\left( \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))' \right)' + (\omega^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_\varphi(\rho) = 0.$$

Обозначив  $u(\rho) := E_\varphi(\rho)$  и  $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$  получаем следующее:

$$\left(\rho^{-1}(\rho u)'\right)' + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2)u = 0. \quad (5)$$

При  $0 < \rho < r_1$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$ , из (5) получаем уравнение Бесселя:

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (6)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$u = C_1 I_1(k_c \rho) + \tilde{C}_1 K_1(k_c \rho), \quad \rho < r_1.$$

Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области, получим, что  $\tilde{C}_1 = 0$  и

$$u = C_1 I_1(k_c \rho). \quad (7)$$

В оболочке волновода ( $r_1 < \rho < r_n$ ) имеем

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - k_i^2 u = 0, \quad k_i^2 = k_0^2 \varepsilon_i(\rho) - \gamma^2. \quad (8)$$

При  $\rho > r_n$  получим

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (9)$$

Так как  $\tilde{C}_2$  равна 0, то решение получится в виде

$$u = C_2 I_1(k_c \rho), \quad \rho > r_n. \quad (10)$$

Условия сопряжения для функций  $u(\rho)$  и  $u'(\rho)$  выглядят следующим образом:

$$[u]|_{\rho=r_i} = 0, \quad [u']|_{\rho=r_i} = 0. \quad (11)$$

**Определение 2.** Необходимо найти вещественные значения  $\gamma$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1. Существует ненулевая функция  $u(\rho)$ , которая определяется формулами (7) и (10).

2. Внутри волновода удовлетворяет уравнениям (8) соответственно, причем определенная таким образом при  $\rho \in [0, +\infty)$ , удовлетворяет условиям сопряжения (11).

## 2. Численный метод вычисления собственных значений

Рассмотрим задачу Коши на отрезке  $[r_1, r_2]$  для уравнения

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_1^2(\rho)u \quad (12)$$

с начальными условиями:

$$u(r_1) = C_1 I_1(k_c r_1), \quad u'(r_1) = C_1 k_c \left( I_0(k_c r_1) - \frac{I_1(k_c r_1)}{k_c r_1} \right). \quad (13)$$

**Замечание 2.** При расчетах необходимо задавать значение одной из постоянных:  $C_1$  или  $C_2$ . Можно задавать значение постоянной на любой из границ волновода.

Далее рассмотрим «следующую» задачу Коши на отрезке  $[r_2, r_3]$

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_2^2(\rho)u \quad (14)$$

с начальными условиями

$$u(r_2 + 0) = u(r_2 - 0), \quad u'(r_2 + 0) = u'(r_2 - 0), \quad (15)$$

где значения  $u(r_2 - 0)$  и  $u'(r_2 - 0)$  определяются из условий сопряжения на границе  $\rho = r_2$  как решения «предыдущей» задачи Коши в точке  $\rho = r_2$ .

Решая вспомогательные задачи Коши на оставшихся отрезках  $([r_3, r_4], \dots, [r_{n-1}, r_n])$ , получаем значения  $u(r_n - 0)$  и  $u'(r_n - 0)$  на границе  $r_n$ .

Взяв постоянную  $C_2 = 1$  и применив условия сопряжения на границе  $r_n$  из формулы (10), получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(r_n)I_1(k_c r_n) - k_c u(r_n) \left( I_0(k_c r_n) - \frac{I_1(k_c r_n)}{k_c r_n} \right). \quad (16)$$

Далее рассмотрим функцию

$$F(\gamma) := u(r_n - 0; \gamma) - u(r_n + 0; \gamma).$$

Используя условия сопряжения на границе  $\rho = r_n$  (11) и решения  $\rho > r_n$  (10), заметим, что  $F(r_n; \gamma) \equiv \Delta(\gamma)$ .

На основании формулы (16) получаем, что значения функции  $F(\gamma)$  можно выразить лишь через решения задачи Коши. Потребуем, чтобы  $\gamma = \tilde{\gamma}$  было таково, что  $F(\gamma) = 0$ , исходя из этого делаем вывод, число  $\tilde{\gamma}$  является решением (постоянной распространения) задачи.

**Утверждение.** Пусть существует отрезок  $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \in [\gamma^*, \gamma^*]$  такой, что  $F(\underline{\gamma})F(\bar{\gamma}) < 0$ . Тогда существует по крайней мере одна постоянная распространения (одно собственное значение)  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  нашей задачи.

На основании данного метода мы можем построить графики зависимости постоянной распространения  $\gamma$  от частоты  $f$ . Частота  $f$  связана с циклической частотой  $\omega$  соотношением  $f = 2\pi\omega$ . Дисперсионными кривыми в данном случае называют кривые  $\gamma = \gamma(f)$ . Если же кривая зависит от амплитуды поля (что имеет место в рассматриваемой нами задаче), то такие кривые называют энергетическими дисперсионными кривыми.

Пусть  $0 < f_* < f^* < \infty$  и  $k_0^2 \sqrt{\epsilon_c} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  – некоторые числа. Будем считать, что

$$f \in [f_*, f^*], \quad \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*].$$

Разбиваем отрезки  $[f^*, f^*]$  и  $[\gamma^*, \gamma^*]$  на  $n$  и  $m$  частей соответственно. Тогда имеем  $\{f_i, \gamma_i\}, i = 0 \dots n, j = 0 \dots m$ , причем  $f_0 = f^*, f_n = f^*, \gamma_0 = \gamma^*, \gamma_m = \gamma^*$ . Построим функцию  $F(f_i; \gamma_j)$ :

$$F(f_i, \gamma_j) := u_{ij}(r_n - 0) - u_{ij}(r_n + 0).$$

Пусть для заданного  $f_i$  существуют такие  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ , при которых

$$F(f_i; \gamma_j)F(f_i; \gamma_{j+1}) < 0.$$

Отсюда следует, что существует значение  $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1}) < 0$ , являющееся собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн; этому собственному значению соответствует толщина слоя  $f_i$ . Значение  $\tilde{\gamma}_j$  может быть найдено с любой степенью точности, например, методом дихотомии.

Используя метод дихотомии, выведем метод нахождения приближенного значения постоянной распространения.

Зададим  $\delta > 0$  – некоторая погрешность. Пусть отрезок  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$  такой, что

$$F(f_i, \underline{\gamma}_1)F(f_i, \bar{\gamma}_1) < 0.$$

Искомое собственное значение:  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ , приближенное собственное значение:  $\tilde{\gamma}_1 \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ .

Определим середину отрезка  $\gamma_1 = 0.5(\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1)$  и вычислим  $F(f_i; \gamma_1)$ .

Проверяем следующие условия:

1. Если  $|F(f_i; \gamma_1)| < \delta$ , то  $\gamma_1$  – искомое приближенное собственное значение.

2. Если  $F(f_i; \underline{\gamma}_1)F(f_i; \gamma_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_n := \underline{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_n := \gamma_1$ , следовательно  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .

3. Если  $F(f_i; \gamma_1)F(f_i; \bar{\gamma}_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_n := \gamma_1$  и  $\bar{\gamma}_n := \bar{\gamma}_1$ , следовательно  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .

Продолжая процесс половинного деления  $n$  раз, получаем, что искомое приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ . Ясно, что  $|\bar{\gamma}_n - \underline{\gamma}_n| = 2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$ .

Выберем число  $n$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \delta$ . Тогда приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n$  постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$  может принять, например, середину отрезка  $[\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n]$ , т.е.  $\tilde{\gamma}_n = 0.5(\bar{\gamma}_n + \underline{\gamma}_n)$ .



### 3. Численные результаты

Численные результаты получены с помощью метода, предложенного в предыдущем разделе.

Было проведено исследование поведения дисперсионных кривых (графиков зависимости спектрального параметра  $\gamma$  от циклической частоты  $\omega$ ).

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые 11-слойного однородного волновода, состоящего из линейных слоев.

Рассматриваются следующие случаи:

а) диэлектрическая проницаемость увеличивается от слоя к слою;

б) диэлектрическая проницаемость уменьшается от слоя к слою;

в) однородные слои чередуются с заполненными вакуумом слоями;

г) диэлектрическая проницаемость сначала увеличивается, а затем уменьшается от слоя к слою.

Дисперсионные кривые показаны на рис. 2. Серая пунктирная линия на рисунках указывает область, где линейная задача имеет решение  $k_0^2 \leq \gamma^2 \leq k_0^2 \max \epsilon_i$ .

Можно сделать следующий вывод: при неизменном количестве и толщине слоев число мод остается постоянным, величина моды ограничена максимальным и минимальным значениями диэлектрической проницаемости в слоях.

Далее рассмотрим  $n$ -слойный однородный волновод, состоящий из линейных слоев, чередующихся с заполненными вакуумом слоями. Рассматриваются следующие случаи: 2 слоя; 4 слоя; 8 слоев; 16 слоев.

Можно сделать следующий вывод: при неизменной толщине волновода с увеличением количества слоев число мод также увеличивается, величина моды ограничена максимальным и минимальным значениями диэлектрической проницаемости в слоях.

Было проведено сравнение спектров неоднородного волновода (диэлектрическая проницаемость внутри которого имеет вид  $\epsilon = -9\rho^2 + 18\rho + 1$ ), со спектром  $n$ -слойного волновода (рис. 4).

Можно сделать следующий вывод: с увеличением числа слоев многослойного волновода дисперсионные кривые становятся похожими на дисперсионные кривые неоднородного волновода.

### Заключение

Проведено численное исследование спектра задачи о вытекающих электромагнитных волнах многослойного волновода. Использование предложенного варианта метода может быть оправдано, когда проводится анализ однородных волноводов с  $n$ -слоями, а «явное» дисперсионное уравнение имеет очень сложную форму.

Для неоднородного волновода явное дисперсионное уравнение недоступно, и численное исследование спектра собственных значений может быть выполнено только специальным методом, разработанным в этой работе. Проведенные эксперименты подтвердили правильность реализации данного метода, его сходимости и эффективность.

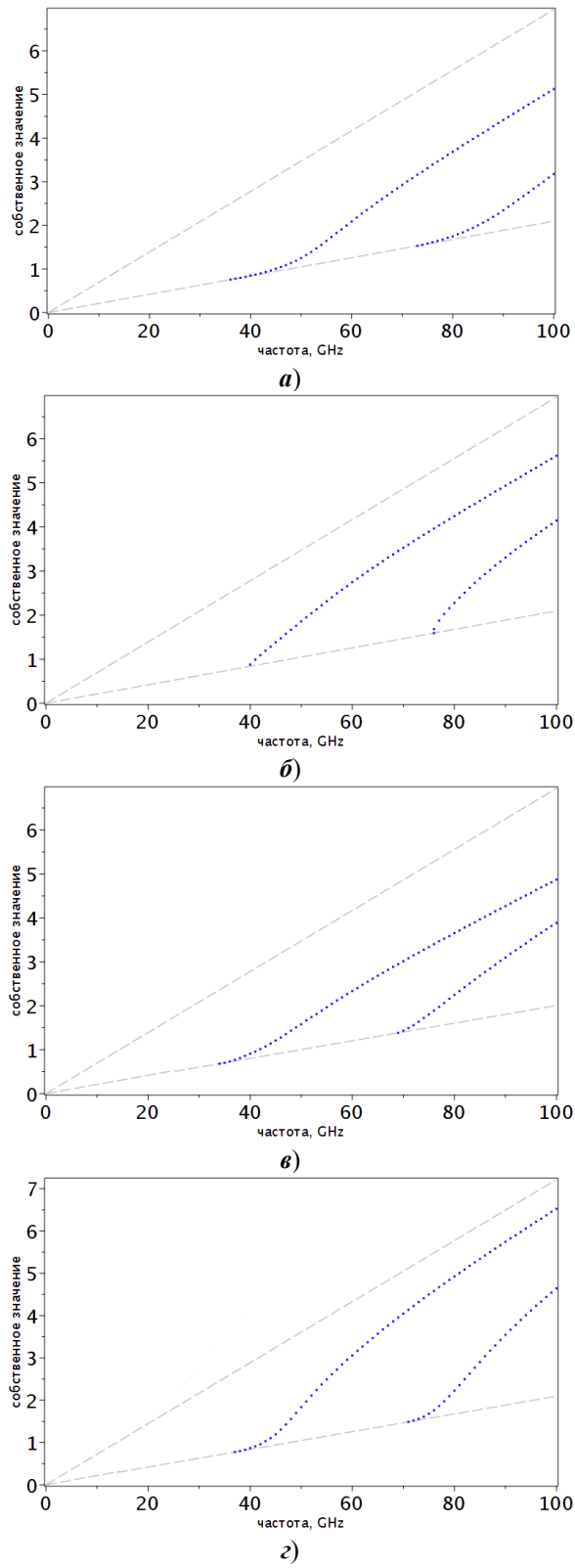


Рис. 2. Дисперсионные кривые

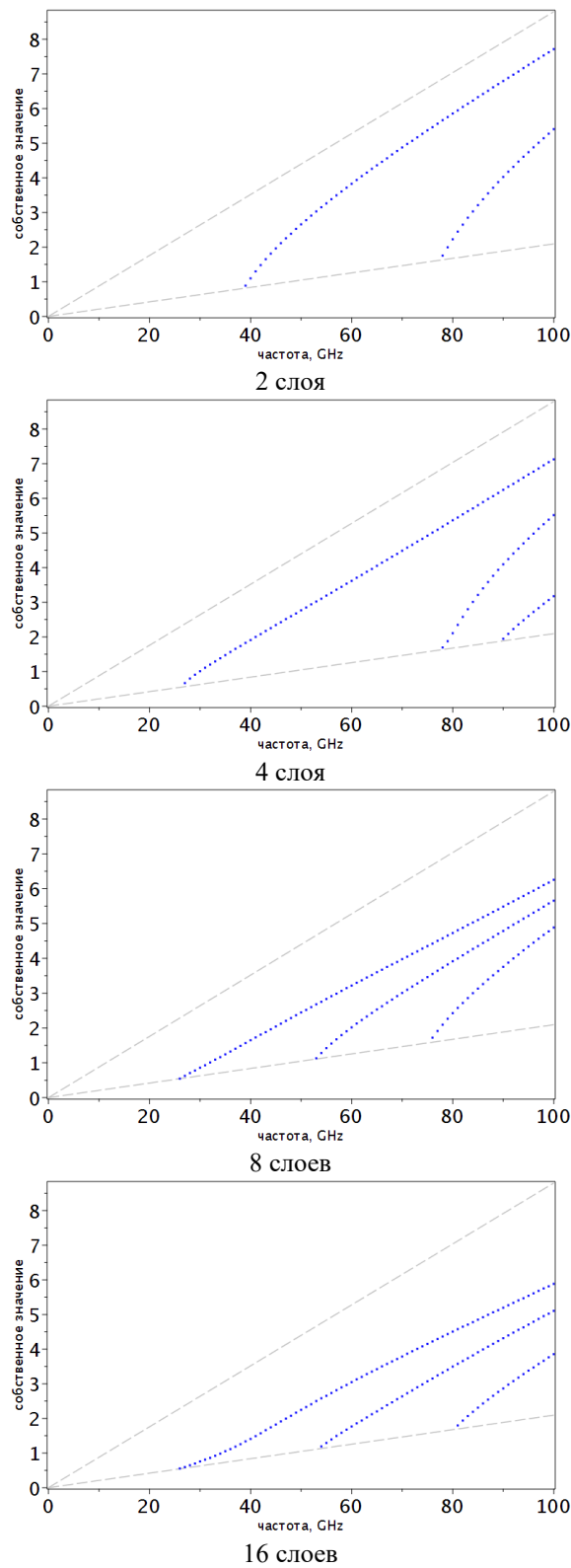


Рис. 3. Дисперсионные кривые

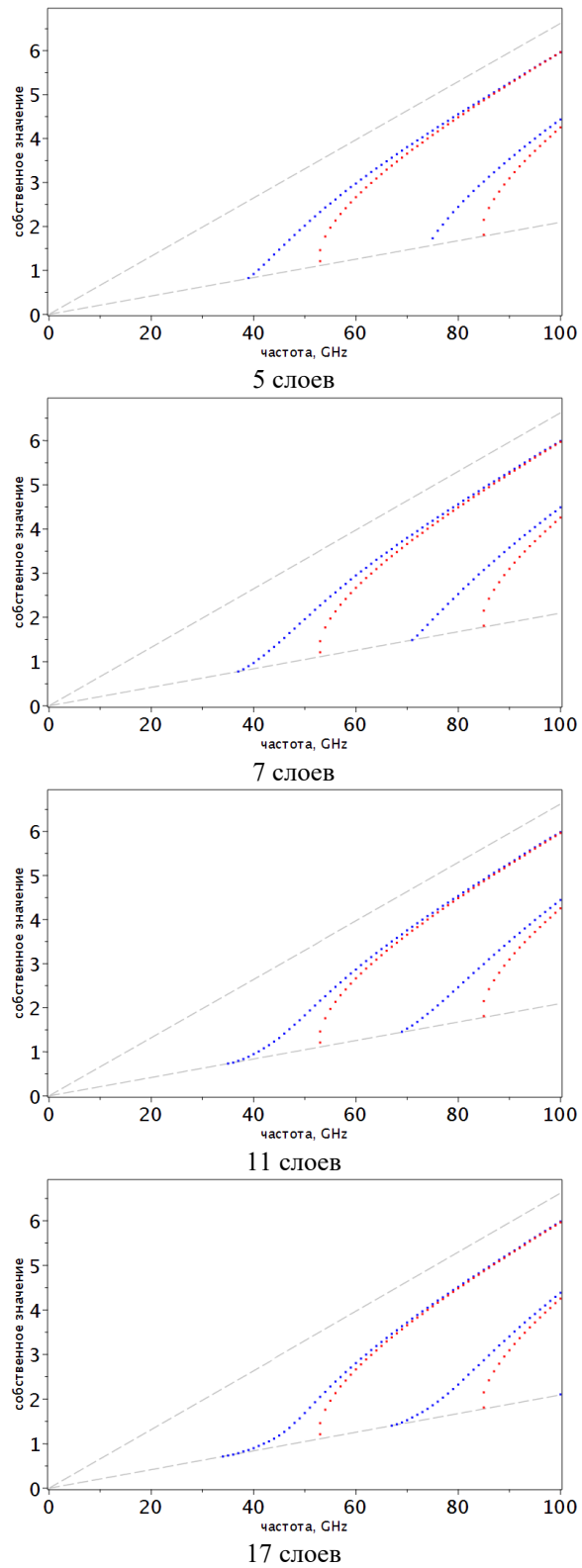


Рис. 4. Дисперсионные кривые

**Библиографический список**

1. **Адамс, М.** Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – Москва : Мир, 1984. – 512 с.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. – 266 с.
3. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – Москва : Радио и связь, 1988. – 440 с.
4. **Schurmann, H. W.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure / H. W. Schurmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol. 58, №1. – P. 1040–1050.
5. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Oganeyants, V. P. Silin // *Soviet Physics JETP.* – 1972. – Vol. 35, № 1. – P. 44–47.

**References**

1. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov* [Introduction to the theory of optical waveguides]. Moscow: Mir, 1984, 512 p. [In Russian]
2. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods for studying problems of electrodynamics]. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009, 266 p. [In Russian]
3. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988, 440 p. [In Russian]
4. Schurmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. *Phys. Rev. E.* 1998, vol. 58, no. 1, pp. 1040–1050.
5. Eleonskii P. N., Oganeyants L. G., Silin V. P. *Soviet Physics JETP.* 1972, vol. 35, no. 1, pp. 44–47.

**Липич Андрей Олегович**

магистрант, Пензенский  
государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Lapich Andrey Olegovich**

Master's degree student, Penza  
State University (40 Krasnaya  
street, Penza, Russia)

**Смолькин Евгений Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

**Smol'kin Evgeniy Yur'evich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-  
department of mathematics and supercom-  
puter modeling, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Шутков Александр Сергеевич**

аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: einstein9@rambler.ru

**Shutkov Aleksandr Sergeevich**

Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

***Снегур Максим Олегович***

аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: [snegur.max15@gmail.com](mailto:snegur.max15@gmail.com)

***Snegur Maksim Olegovich***

Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Лапич, А. О. Численный метод решения задачи о распространении вытекающих ТЕ-поляризованных волн в многослойном волноводе кругового сечения / А. О. Лапич, Е. Ю. Смолькин, А. С. Шутков, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 114–126. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-9.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ПОКЛИНГТОНА И ГАЛЛЕНА ДЛЯ ТОНКИХ ПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Одной из центральных задач в электронике сверхвысоких частот является построение миниатюрных антенн, обладающих высокими характеристиками. Основными уравнениями, используемыми при моделировании проволочных антенн различной конфигурации, являются уравнения Поклингтона, Галлена, сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. При численном решении уравнений Поклингтона и Галлена в основном используются методы моментов и Галеркина. Так как уравнения Поклингтона и Галлена относятся к классу некорректных задач, то при реализации методов моментов и Галеркина возникают дополнительные трудности, связанные с неустойчивостью вычислительных схем. В данной работе для решения уравнений Поклингтона и Галлена предлагается применить непрерывный метод решения операторных уравнений, обладающий эффектом регуляризации. Этот эффект обусловлен тем, что непрерывный метод решения операторных уравнений построен на основе Ляпуновской теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

*Материалы и методы.* Исследуются приближенные методы решения уравнений Поклингтона и Галлена. Метод построения вычислительных схем заключается в следующем. Исходные уравнения аппроксимируются системой линейных алгебраических уравнений, построенных по технологии метода сплайн-коллокации. Система линейных алгебраических уравнений решается непрерывным операторным методом. В качестве достоинств предложенного метода следует отметить: его устойчивость при возмущении ядер уравнений и правых частей и возможность при построении вычислительной схемы учесть граничные условия на концах вибратора.

*Результаты.* Построены новые устойчивые численные методы решения уравнений Поклингтона и Галлена. Эффективность предложенных методов продемонстрирована решением модельных примеров.

*Выводы.* Предложенный в работе метод построения и обоснования сходимости вычислительных схем может быть распространен на уравнения, моделирующие различные модификации антенн и являющиеся аналогами уравнений типа Поклингтона и Галлена.

**Ключевые слова:** уравнения Поклингтона и Галлена, метод коллокаций, вибраторы.

I. V. Boykov, P. V. Aykashev

## APPLICATION OF THE CONTINUOUS OPERATOR METHOD TO THE SOLUTION OF THE POKKLINGTON AND GALLEN EQUATIONS FOR THIN WIRE ANTENNAS

© Бойков И. В., Айкашев П. В., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

**Abstract.**

*Background.* One of the central tasks in microwave electronics is the construction of miniature antennas with high performance. The main equations used in modeling wire antennas of various configurations are the Pocklington, Gallen equations, singular and hypersingular integral equations. In the numerical solution of the Pocklington and Gallen equations, the methods of moments and Galerkin are mainly used. Since the Pocklington and Gallen equations belong to the class of ill-posed problems, when implementing the methods of moments and Galerkin, additional difficulties arise due to the instability of computational schemes. In this paper, to solve the Pocklington and Gallen equations, it is proposed to apply a continuous method for solving operator equations, which has the effect of regularization. This effect is due to the fact that the continuous method for solving operator equations is based on the Lyapunov theory of stability of solutions of differential equations.

*Materials and methods.* The article investigates approximate methods for solving the Pocklington and Gallen equations. The method for constructing computational schemes is as follows. The initial equations are approximated by a system of linear algebraic equations constructed using the spline collocation method. The system of linear algebraic equations is solved by a continuous operator method. The advantages of the proposed method should be noted: 1) its stability under perturbation of the kernels of equations and right-hand sides; 2) the construction of a computational scheme allows taking into account the boundary conditions at the ends of the vibrator.

*Results.* New stable numerical methods for solving the Pocklington and Gallen equations are constructed. The effectiveness of the proposed methods is demonstrated by solving model examples.

*Conclusions.* The proposed method for constructing and justifying the convergence of computational schemes can be extended to equations that model various antenna modifications and are analogous to equations of the Pocklington and Gallen type.

**Keywords:** Pocklington and Gallen equations, collocation method, vibrators.

**Введение**

Более ста лет одним из основных математических аппаратов, применяемых при моделировании электромагнитных процессов в электрическом вибраторе, являются интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона и интегральное уравнение Галлена [1]. В последнее время к исследованию этих процессов привлекаются также сингулярные интегральные уравнения [2, 3] и гиперсингулярные интегральные уравнения [4].

В качестве численных методов для решения уравнений Поклингтона и Галлена привлекается, как правило, метод моментов и его модификации [5].

В отличие от известных работ, в которых упомянутые уравнения решаются методом моментов, в данной работе используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Преимущества этого метода заключаются в его устойчивости к возмущениям ядер уравнений и правых частей. Уравнения Поклингтона и Галлена являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и их решения являются некорректными задачами. Поэтому целесообразно решать упомянутые уравнения непрерывным методом решения операторных уравнений, который обладает регуляризующими свойствами.

Статья посвящена приближенному решению уравнений Поклингтона и Галлена, моделирующих тонкие изогнутые проволочные антенны.



В работе предложены новые численные методы и дано их обоснование. Исследуются вопросы быстроты сходимости этих методов при решении уравнений Поклингтона и Галлена.

Статья построена следующим образом. В первом разделе представлен непрерывный метод решения операторных уравнений. Во втором разделе даны постановка задачи и краткий обзор литературы. Третий раздел посвящен приближенному решению уравнения Поклингтона. Четвертый раздел посвящен приближенному решению уравнения Галлена. В пятом разделе приведены решения модельных задач.

### 1. Непрерывный метод решения операторных уравнений

Для решения уравнений Поклингтона и Галлена в статье используется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [6]. Приведем здесь его краткое описание.

Пусть  $X$  – банахово пространство;  $K$  – оператор, действующий из  $X$  в  $X$ ;  $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$ ;  $S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\}$ ;  $\Lambda(K)$  – логарифмическая норма линейного оператора  $K$ , определяемая [7] выражением  $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1) / h$ , где символ  $h \downarrow 0$  означает, что  $h$  стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , в  $n$ -мерном пространстве  $R_n$  векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \|x\|_2 = \left[ \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы  $A$  равна [8]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left( a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right),$$

$$\Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left( (A + A^T) / 2 \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left( a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right).$$

Здесь  $\lambda_{\max} \left( (A + A^T) / 2 \right)$  – наибольшее собственное значение матрицы  $(A + A^T) / 2$ .

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (1)$$

где  $A: X \rightarrow X$  – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство  $X$  само в себя.

Поставим уравнению (1) в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1** [6]. Пусть задача (2)–(3) имеет решение  $x^*$ , и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$ , расположенной в шаре  $B(x^*, r)$ , выполняются следующие условия:

$$1) \text{ при любом } t (t > 0) \text{ выполняется неравенство } \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0;$$

$$2) \text{ справедливо неравенство } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) при  $t$ , стремящемся к бесконечности, сходится к решению  $x^*$  уравнения (1).

## 2. Уравнения Поклингтона и Галлена

Интегральное уравнение электрического вибратора описывает связь между электрическим полем и распределением тока по проводнику. Оно получено из уравнений Максвелла и имеет следующий вид [9]:

$$E^t(r) = -\frac{i\eta}{k} \int_{v'} I(r') [k^2 + \nabla^2] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dv'. \quad (4)$$

Здесь  $E^t(r)(r = (x_1, x_2, x_3))$  – вектор электрического поля в точке наблюдения  $r$ ,  $I(r')$  ( $r' = (x_1', x_2', x_3')$ ), – плотность текущего распределения тока (искомая величина) в точке источника  $r'$ ,  $[k^2 + \nabla^2]$ , – оператор Гельмгольца, функция Грина которого равна

$$e^{-ik|r-r'|} / 4\pi|r-r'|, \quad \left( |r-r'| = \sum_{j=1}^3 |x_j - x_j'| \right);$$

$k$  и  $\eta$  – соответственно волновое число и внутренний импеданс в свободном пространстве:  $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ,  $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , где  $\omega$  – угловая частота,  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$  – магнитная и диэлектрическая проницаемость соответственно.

Интегральное уравнение Поклингтона получено из уравнения (4) и граничного условия для тонкой проволоки произвольной формы. Граничное условие для совершенного проводника определяется из условия, что полное электрическое поле исчезает на его поверхности. Тогда можно считать, что точка  $r$  лежит на поверхности проводника и  $E^t(r_s) = E^i(r_s) + E^s(r_s) = 0$ , где

$E^i(r_s)$  и  $E^s(r_s)$  – наложенное и рассеянное электрическое поле соответственно. Для высоких частот благодаря скин-эффекту ток может быть расположен только на поверхности провода. Следовательно, наложенное электрическое поле имеет вид

$$E^i(r=r_s) = -\frac{i\eta}{k} \iint_{s'\varphi} I_s(r')(r'=r_s) [k^2 + \nabla^2] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ad\varphi' ds', \quad (5)$$

где переменная  $s'$  представляет длину дуги по проводу;  $\varphi'$  – азимутальный угол вокруг поперечного сечения провода. Текущее распределение тока трансверсально постоянно, учитывая, что радиус проволоки  $a$  очень мал по сравнению с длиной волны.

В результате получена [10] следующая модификация уравнения Поклингтона:

$$E_s^t(s) = -\frac{i}{\omega\epsilon} \int_{s'} I_s(s') \left[ k^2 (s \cdot s') + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \right] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ds', \quad (6)$$

где  $E_s^t$  – тангенциальное наложенное электрическое поле. Учитывая скин-эффект в тонкой проволоке, в уравнении (6) электрическое поле можно выразить в виде криволинейного интеграла по длине дуги  $s'$ .

Уравнение (6) можно использовать при любой топологии тонкой проволочной антенны.

Из уравнения (6) следует, что тангенциальное наложенное электрическое поле на поверхности совершенного проводника выражается гиперсингулярным интегральным уравнением.

В уравнении (5) оператор  $\nabla$  действует по переменной  $s$ . Таким образом, уравнение (5) эквивалентно следующему:

$$E^i(r=r_s) = -\frac{i\eta}{k} [k^2 + \nabla^2] \iint_{s'\varphi} I_s(r')(r'=r_s) \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ad\varphi' ds', \quad (7)$$

Классическое уравнение Поклингтона прямолинейного вибратора имеет вид [1, с. 222]:

$$\left( k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-l}^l I_z(z') G(a, z-z') dz' = A_z(a, z), \quad (8)$$

где  $A_z(a, z)$  – продольная составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока  $I_z(z)$ ;  $2l$  – длина вибратора;  $a$  – радиус вибратора,

$$G(a, z-z') = \frac{1}{4\pi R_a(z-z')} \exp\{-ikR_a(z-z')\},$$

$$R_a(z-z') = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}, \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} / c,$$

$\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающая вибратор;  $\omega$  – угловая частота;  $c$  – скорость света.

Это уравнение соответствует модели тонкого вибратора, работающего на малых частотах. В этом случае ток распределяется по всему поперечному сечению провода и моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей через центр цилиндра (провода) и точку разрыва.

Следует отметить, что классическое уравнение Поплингтона описывается уравнением Фредгольма первого рода с гладким ядром [1, 11] и, следовательно, является некорректной задачей.

Приближенному решению уравнения (8) посвящено много работ, в которых в большинстве своем применяются методы Галеркина и моментов [5, 10, 12].

В работе [12] метод моментов применяется для решения уравнения Поплингтона линейной антенны:

$$\int_{-l}^l I(z') \left[ \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z), \quad (9)$$

где  $R_a(z-z') = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$ .

*Замечание.* Это уравнение может быть получено из (7) коммутацией операторов дифференцирования и интегрирования.

Отметим некоторые модификации уравнения (7). Так как электромагнитное поле моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей по центру вибратора и точку разрыва, в уравнении (7) при очень малом радиусе провода естественно перейти к пределу при  $a \rightarrow 0$ . В результате получаем уравнение [4]:

$$\left( k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ik|z-z'|}}{|z-z'|} dz' = A_z(z), \quad (10)$$

которое является гиперсингулярным интегральным уравнением.

Таким образом, гиперсингулярные интегральные уравнения естественно возникают как при моделировании антенн, работающих на высоких частотах, так и при моделировании очень тонких проволочных антенн.

Приближенные методы решения уравнения (10) исследовались в работе [4], где было предложено несколько методов. В частности, был предложен следующий метод. Так как на торцах вибратора ток  $I_z(l) = I_z(-l) = 0$ , то уравнение (10) было продолжено на числовую ось и к нему было применено преобразование Фурье. Полученное в спектральной области уравнение решалось итерационным методом.

В работе [2] показано, что физически корректной является математическая модель произвольного вибратора, представленная следующим сингулярным интегральным уравнением первого рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{I'_z(z')}{z'-z} dz' + \int_{-l}^l I'_z(z') K(z, z') dz' = 4i\omega\epsilon_0\epsilon E^{cT}(z),$$

где

$$K(z, z') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z'-z)} \Delta g(h) dh,$$

$$\Delta g(h) = \frac{\gamma^2 - h^2}{h} J_0 \left( -ia\sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)} \left( -ia\sqrt{h^2 - \gamma^2} \right) \right) + \text{sgn}(h),$$

$J_0$  и  $H_0^{(2)}$  – функции Бесселя первого рода и Ханкеля второго рода соответственно.

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на различных классах функций исследовались в работах [13–17].

Наряду с уравнением Поклингтона при исследовании вибраторов часто используется уравнение Галлена

$$\int_{-l}^l I_z(z') G(a, z - z') dz' = A \cos \beta z + B \sin \beta z - \frac{i2\pi v}{w} \sin \beta |z|, \quad (11)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные константы, определяемые из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора;  $w = \beta / (\omega \epsilon)$ .

При стремлении  $a$  к нулю уравнение (11) трансформируется в гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-l}^l I_z(z') G(z - z') dz' = A \cos \beta z + B \sin \beta z - \frac{i2\pi v}{w} \sin \beta |z|, \quad (12)$$

где  $G(z - z') = \frac{1}{4\pi |z - z'|} \exp\{-ik |z - z'|\}$ .

### 3. Приближенное решение уравнения Поклингтона

При исследовании излучения прямого вибратора исходным может служить уравнение Поклингтона

$$\left( \frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E^{ct}(z)$$

где  $E^{ct}$  – стороннее электрическое поле;  $R(z - z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$ ,  $\gamma^2 = k^2 \epsilon \mu$ ,  $k = \omega / c$  – волновое число;  $\epsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость пространства, окружающего вибратор,  $a$  – толщина вибратора.

#### Первая вычислительная схема

Для простоты описания вычислительной схемы введем обозначение  $f(z) = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E^{ct}(z)$  и рассмотрим уравнение

$$\left( \frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z), \quad -l \leq z \leq l. \quad (13)$$

Введем обозначение

$$U(z) = \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz'.$$

Подставив  $U(z)$  в уравнение (13), приходим к дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) U(z) = f(z). \quad (14)$$

Присоединим к уравнению (14) граничные условия

$$U(-l) = a_1, U(l) = a_2, \quad (15)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – произвольные вещественные числа, которые в дальнейшем подлежат определению.

Решение уравнения (14) имеет вид

$$U(z) = F(z) + A \cos(\gamma z) + B \sin(\gamma z), \quad (16)$$

где  $F(z)$  – частное его решение.

Подставив в уравнение (16)  $z = -l$ ,  $z = l$  и воспользовавшись граничными условиями (15), приходим к системе уравнений

$$a_1 = F(-l) + A \cos(\gamma l) - B \sin(\gamma l),$$

$$a_2 = F(l) + A \cos(\gamma l) + B \sin(\gamma l).$$

Для простоты выкладок предположим, что рассматриваемый диполь симметричный и  $I_z(-l) = I_z(l)$ ,  $U(-l) = U(l)$ . Тогда

$$U(z) = F(z) + \frac{a_1 - a_2 - F(-l) - F(l)}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

в предположении, что  $\cos(\gamma l) \neq 0$ ,  $\sin(\gamma l) \neq 0$ .

Для определенности положим в уравнении (14)  $f(z) = 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)$ , т.е. полагаем  $E^{ct}(z) = -4\sin\omega z$ . Тогда

$$F(z) = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l)}{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2 - 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l) + 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega(-l))}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) +$$

$$+ \frac{a_2 - a_1 - 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l) + 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega(-l))}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

с неизвестными коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ .

*Замечание.* Отметим, что полученное уравнение совпадает с уравнением Галлена, полученным в [18] из физических соображений.

Так как в работе рассматривается симметричный вибратор, то окончательно имеем

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z). \quad (17)$$

Вычислительную схему решения уравнения (17) построим, пользуясь технологией метода сплайн-коллокации со сплайнами нулевого порядка.

Введем узлы  $x_k = -l + \frac{lk}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N$ .

Приближенное решение уравнения (17) будем искать в виде функции

$$I_{z,N}(z') = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(z'). \quad (18)$$

где

$$\psi_k(z') = \begin{cases} 1, & z' \in \Delta_k, \\ 0, & [-l, l] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1,$$

$$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-2, \quad \Delta_{2N-1} = [x_{2N-1}, x_{2N}].$$

Так как на торцах вибратора  $I_z(\pm l) = 0$ , то полагаем  $\alpha_0 = \alpha_{2N-1} = 0$ .

Коэффициенты  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, \dots, 2N-2$ , ищутся из следующих систем уравнений.

**Первый вариант.** Вычисляя интеграл в левой части уравнения (17) по квадратурной формуле прямоугольников, имеем

$$\frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) + \frac{a_2 - a_1}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (19)$$

Здесь  $R_a(k, j) = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + a^2}$ ,  $a$  – радиус стержня антенны.

Таким образом, получаем систему из  $2N$  уравнений с  $2N$  неизвестными.

Эту систему более удобно представить в следующем виде, вынеся в левую часть неизвестные:

$$\begin{aligned} & \frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \\ & - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Система (20) имеет единственное решение, если существует такой вектор  $v = (v_0, \dots, v_{2N-1})$ ,  $v_k = \pm 1, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , что матрица, стоящая в левой части системы

$$\begin{aligned} & v_j \left( \frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \right. \\ & \left. - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) \right) = v_j \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1, \end{aligned}$$

имеет в некотором банаховом пространстве отрицательную логарифмическую норму.

Это следует из теоремы Лозинского [19].

Погрешность решения уравнения (20) зависит от класса функций, к которому принадлежат искомые токи. Если они принадлежат классу функций, имеющих ограниченные производные первого порядка, то можно показать (по аналогии с работой [20]), что погрешность имеет порядок  $N^{-1}$ , где  $N$  – число узлов коллокации.

**Второй вариант.** Подставляя функцию (18) в уравнение (17), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k &= \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) + \\ &+ \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j), j = 0, 1, \dots, 2N - 1, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь

$$p_{jk} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j)}}{4\pi R_a(z'-x_j)} dz', R_a(z'-x_j) = \sqrt{(z'-x_j)^2 + a^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1.$$

Как и в первом варианте, систему уравнений удобно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) =$$



$$= \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (22)$$

При реализации вычислительных схем (20), (22) применяется непрерывный метод решения операторных уравнений. Так как он одинаково реализуется для обоих уравнений, ограничимся рассмотрением уравнения (22).

Поставим в соответствие уравнению (22) задачу Коши

$$\frac{da_1(\sigma)}{d\sigma} = v_0 \left[ \sum_{k=1}^{2N-2} p_{0k} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_0)}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_0) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_0) \right]; \quad (23)$$

$$\frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma} = v_j \left[ \sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) \right], \quad j = 1, \dots, 2N-2;$$

$$\frac{da_2(\sigma)}{d\sigma} = v_{2N-1} \left[ \sum_{k=1}^{2N-2} p_{2N-1,k} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_{2N-1})}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_{2N-1}) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_{2N-1}) \right],$$

$$a_1(0) = 0, a_2(0) = 0, \alpha_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, 2N-2. \quad (24)$$

Константы  $v_j = \pm 1, j = 0, 1, \dots, 2N-1$ , подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма матрицы, стоящей в левой части системы уравнений (22), была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

Тогда согласно теореме 1 решение задачи Коши (23), (24) сходится в метрике выбранного банахова пространства к решению системы уравнений (22).

*Замечание.* В качестве начальных условий в задаче Коши (23), (24) может быть взят любой набор констант.

*Замечание.* Для решения задачи Коши (23), (24) может быть использован любой численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В приведенных ниже примерах задача Коши (23), (24) решалась методом Эйлера.

### Вторая вычислительная схема

Приведем еще одну вычислительную схему для решения уравнения Поклингтона.

Будем исходить из уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \left[ \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z),$$

где

$$R_a(z-z') = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}.$$

Проведя несложные вычисления, приходим к уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') h(z, z') dz' = i\omega\epsilon E_z(z),$$

где

$$h(z, z') = \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')} \left( \left[ k^2 + \frac{(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2 + (z-z')^2} + \frac{3(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^2} \right] + ik \left[ \frac{(z-z')^2}{a^2 + (z-z')^2} - \frac{1}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} + \frac{2(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right] \right). \quad (25)$$

Вычислительные схемы для решения уравнения (25) строятся по аналогии с вычислительными схемами (20) и (22). Здесь они не приводятся.

#### 4. Приближенное решение уравнения Галлена

При выводе уравнения Галлена тонкого вибратора полагают, что  $a \ll l, a \ll \lambda$ . Здесь  $a$  – радиус поперечного сечения вибратора,  $2l$  – его длина,  $\lambda$  – длина волны.

При этом делаются следующие предположения [18]:

1. Поверхностные электрические токи  $I_z^-(z)$  вместе с магнитными эквивалентными токами  $I_\Phi^m(z)$  заменяются бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока  $I_z(z) = 2\pi a I_z^-(z)$ , и полагают  $I_z^-(-l) = I_z^-(l)$ . Продольный электрический ток в области зазора считается непрерывным. Торцевые токи игнорируются.

2. Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля  $E_z(z)$ , создаваемая током  $I_z(z)$  на боковой поверхности цилиндра радиуса  $a$ , обращается в нуль всюду, кроме окрестности зазора шириной  $b$ :

$$E_z(z) = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{b}{2}, \\ i\omega \epsilon E(z), & |z| \leq \frac{b}{2}, \end{cases}$$

где  $b$  – ширина зазора.

*Замечание.* Для узких зазоров функция  $E_z(z)$ ,  $-\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$ , обычно полагается постоянной.

С учетом этих предположений получено (подробности см. в [18]) уравнение Галлена:

$$\begin{aligned} \int_{-l_1}^{l_2} I_z(z') K(z-z') dz' = \\ = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{2\pi i V}{W} \sin k|z|, \quad -l_1 \leq z \leq l_2, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$K(z-z') = \frac{e^{-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}.$$

Правая часть уравнения (26) может рассматриваться, как суперпозиция трех бегущих волн, одна из которых имеет амплитуду  $\frac{2\pi V}{W}$ , где  $V$  – ЭДС генератора,  $W = k / (\omega \epsilon)$ .

В случае симметричного вибратора имеем

$$\int_{-l}^l I_z(z') K(z-z') dz' = C_3 \cos kz - \frac{2\pi i V}{W} \sin k|z|, \quad -l \leq z \leq l. \quad (27)$$

*Замечание.* Уравнение Галлена может быть получено из уравнения Поклингтона тождественными преобразованиями. Это продемонстрировано выше при выводе вычислительной схемы для уравнения Поклингтона.

Построение численных методов для уравнения Галлена подобно аналогичному построению для уравнения Поклингтона, поэтому опускается.

## 5. Вычислительный эксперимент

В этом разделе приведены результаты численных экспериментов решения уравнения Галлена с  $\delta$ -функцией в правой части. Таким образом, ставится задача решения непрерывным методом операторных уравнений следующего уравнения:

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = \delta(z). \quad (28)$$

При этом  $\delta$ -функция аппроксимируется  $\delta$ -образными функциями.

**Пример 1.**

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z), \quad (29)$$

$$l = 10, a = 0,5, \gamma = 0,0001366732941, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0,8, h = 10,$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & -l \leq z \leq -\delta_1, \\ \frac{h(\delta_1 + z)}{\delta_1 - \delta_2}, & -\delta_1 \leq z \leq -\delta_2, \\ h, & -\delta_2 \leq z \leq \delta_2, \\ \frac{h(\delta_1 - z)}{\delta_1 - \delta_2}, & \delta_2 \leq z \leq \delta_1, \\ 0, & \delta_1 \leq z \leq l. \end{cases}$$

График функции, стоящей в правой части уравнения (29) приведен на рис. 1.

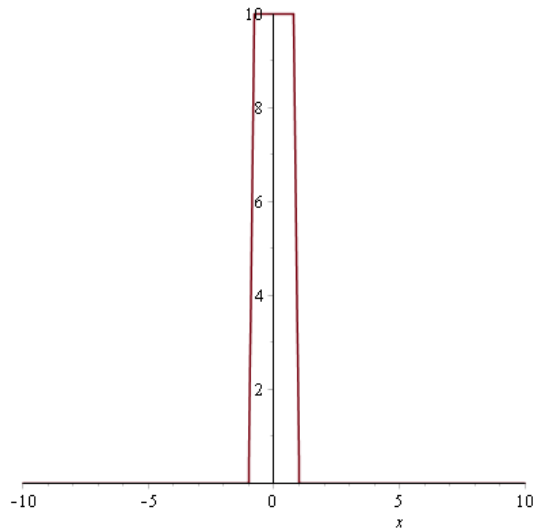


Рис. 1. Правая часть уравнения (29)

Уравнение (29) решалось при числе узлов коллокации  $N = 50$ . Количество итераций – 5000.

Результаты вычислений представлены на рис. 2 и 3.

**Пример 2.**

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = f(z), \quad (30)$$

$$l = 10, a = 0,5, \gamma = 0,0001366732941, \delta_1 = 0,2, \delta_2 = 0,1,$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & -l \leq z \leq -\delta_1, \\ \frac{h(\delta_1 + z)}{\delta_1 - \delta_2}, & -\delta_1 \leq z \leq -\delta_2, \\ h, & -\delta_2 \leq z \leq \delta_2, \\ \frac{h(\delta_1 - z)}{\delta_1 - \delta_2}, & \delta_2 \leq z \leq \delta_1, \\ 0, & \delta_1 \leq z \leq l. \end{cases}$$

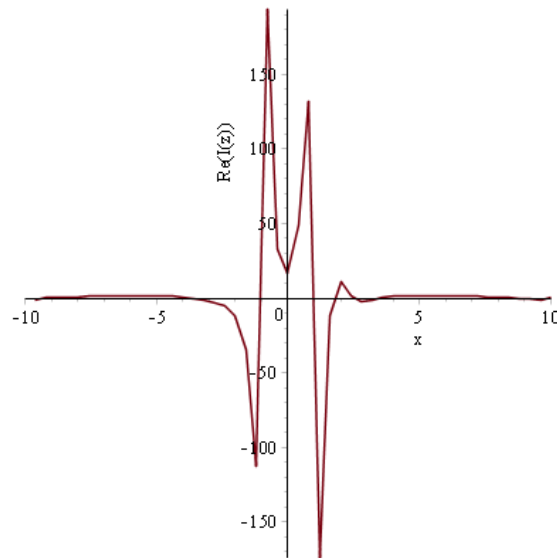


Рис. 2. Действительная часть волны возбужденного тока

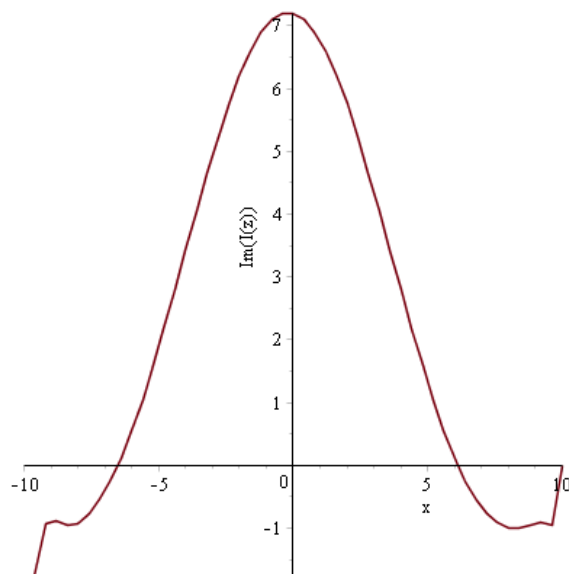


Рис. 3. Мнимая часть волны возбужденного тока

Уравнение (30) решалось при числе узлов коллокации  $N = 50$ . Количество итераций – 5000.

Результаты вычислений представлены на рис. 4 и 5.

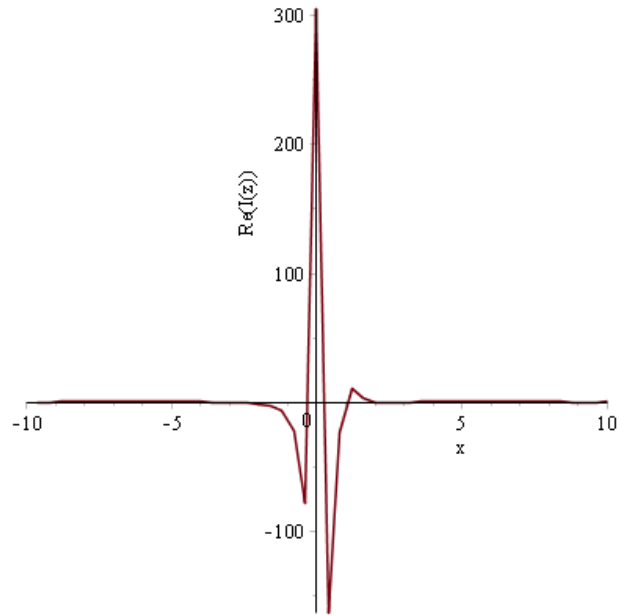


Рис. 4. Действительная часть волны возбужденного тока

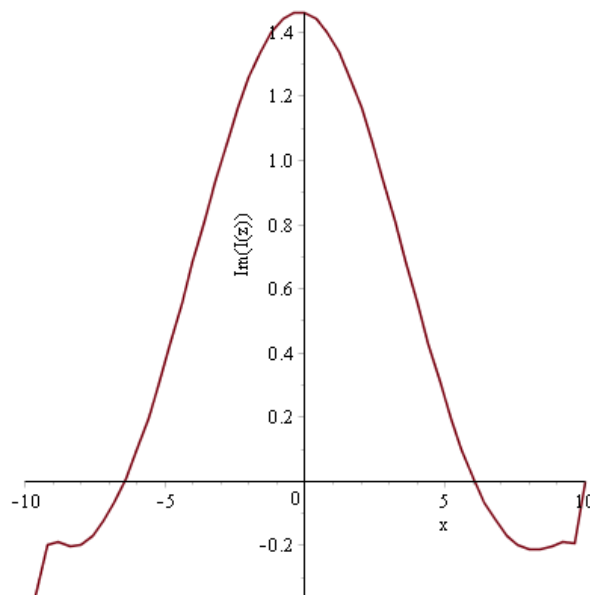
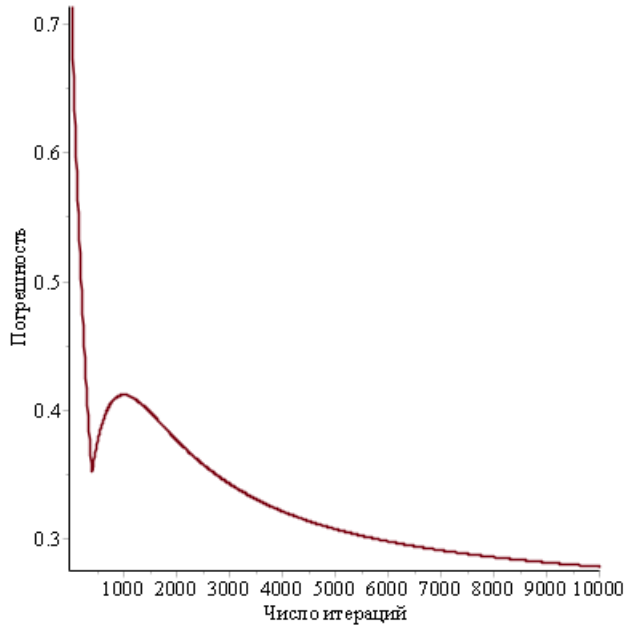
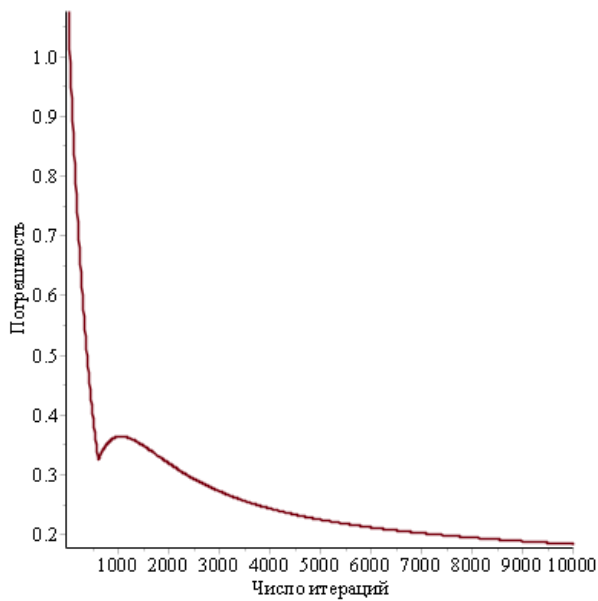


Рис. 5. Мнимая часть волны возбужденного тока

На рис. 6, 7 представлена зависимость точности решения уравнений Галлена от числа итераций при реализации непрерывного операторного метода вычислительной схемой Эйлера.

Рис. 6. Погрешность при числе узлов коллокации  $N = 50$ Рис. 7. Погрешность при числе узлов коллокации  $N = 100$ 

#### Библиографический список

1. **Сазонов, Д. М.** Антенны и устройства СВЧ / Д. М. Сазонов. – Москва : Высшая школа, 1988. – 434 с.
2. **Неганов, В. А.** Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению / В. А. Неганов, И. В. Матвеев, С. В. Медведев // Письма в журнал теоретической физики. – 2000. – № 12. – С. 86–94.

3. **Неганов, В. А.** Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи / В. А. Неганов // *Успехи современной радиотехники*. – 2005. – № 12. – С. 16–24.
4. **Бойков, И. В.** Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. – 2008. – № 8. – С. 94–106.
5. *Вычислительные методы в электродинамике* / под ред. Р. Митры. – Москва : Мир. – 1977. – 488 с.
6. **Бойков И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // *Дифференциальные уравнения*. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
7. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970. – 534 с.
8. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – Москва : Мир, 1988. – 334 с.
9. **Burke, G. J.** Method of Moment / G. J. Burke, A. J. Poggio // *Numerical Electromagnetics Code (NEC)*. – Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
10. **Barrera-Figueroa, V.** Simplification of Pocklington's integral equation for arbitrary bent thin wires / V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza and J. Lopez-Bonilla // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. – 2005. – Vol. 39. – P. 563–574.
11. **Pocklington, H. C.** Electrical Oscillations in Wires / H. C. Pocklington. – London, England, Cambridge Phil. Soc. Proc., 1897. – P. 324–332.
12. **Rawle, W. D.** The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design / W. D. Rawle // *High Frequency Electronics*. – 2006. – Vol. 2. – P. 43–47.
13. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – Москва : Янус-К, 2001. – 508 с.
14. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2016. – № 2. – С. 68–84.
15. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классах функций с весами  $(1-t^2)^{-1/2}$  / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2017. – № 2. – С. 79–90.
16. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классе функций с весом  $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}$  / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2019. – № 3. – С. 76–92.
17. **Бойков, И. В.** Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // *Динамические системы*. – 2019. – Т. 9 (37), № 3. – С. 244–272.
18. **Войтович, Н. И.** УКВ вибраторные антенны / Н. И. Войтович, А. В. Ершов, А. Н. Соколов. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 85 с.
19. **Лозинский, С. М.** Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I / С. М. Лозинский // *Известия вузов. Математика*. – 1958. – № 5. – С. 52–90.



20. Boykov, I. V. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina // Applied Numerical Mathematics. – 2018. – Vol. 127. – P. 280–305.

### References

1. Sazonov D. M. *Antenny i ustroystva SVCh* [Microwave antennas and devices]. Moscow: Vysshaya shkola, 1988, 434 p. [In Russian]
2. Neganov V. A., Matveev I. V., Medvedev S. V. *Pis'ma v zhurnal teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of Theoretical Physics]. 2000, no. 12, pp. 86–94. [In Russian]
3. Neganov V. A. *Uspekhi sovremennoy radiotekhniki* [Advances in modern radio engineering]. 2005, no. 12, pp. 16–24. [In Russian]
4. Boykov I. V., Tarasov D. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2008, no. 8, pp. 94–106. [In Russian]
5. *Vychislitel'nye metody v elektrodinamike* [Computational methods in electrodynamics]. Ed. by R. Mitry. Moscow: Mir, 1977, 488 p. [In Russian]
6. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
7. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow: Nauka, 1970, 534 p. [In Russian]
8. Dekker K., Verwer Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988, 334 p. [In Russian]
9. Burke G. J., Poggio A. J. *Numerical Electro-magnetics Code (NEC)*. Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
10. Barrera-Figueroa V., Sosa-Pedroza J. and Lopez-Bonilla J. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2005, vol. 39, pp. 563–574.
11. Pocklington H. C. *Electrical Oscillations in Wires*. London, England, Cambridge Phil. Soc. Proc., 1897, pp. 324–332.
12. Rawle W. D. *Higt Fraquency Electronics*. 2006, vol. 2, pp. 43–47.
13. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p. [In Russian]
14. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2016, no. 2, pp. 68–84. [In Russian]
15. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 2, pp. 79–90. [In Russian]
16. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 76–92. [In Russian]
17. Boykov I. V. *Dinamicheskie sistemy* [Dynamical systems]. 2019, vol. 9 (37), no. 3, pp. 244–272. [In Russian]
18. Voytovich N. I., Ershov A. V., Sokolov A. N. *UKV vibratornye anteny* [VHF vibrator antennas]. Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2002, 85 p. [In Russian]
19. Lozinskiy S. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1958, no. 5, pp. 52–90. [In Russian]
20. Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. *Applied Numerical Mathematics*. 2018, vol. 127, pp. 280–305.

***Бойков Илья Владимирович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

***Boikov Ilya Vladimirovich***

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of  
the sub-department of higher and applied  
mathematics, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

***Айкашев Павел Владимирович***

аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

***Aykashev Pavel Vladimirovich***

Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Бойков, И. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 127–146. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-10.

### **Внимание авторов!**

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows (тип файла – RTF, DOC).

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах. Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полуторный интервал. Статья **обязательно** должна содержать индекс УДК, ключевые слова и развернутую аннотацию объемом от 100 до 250 слов, имеющую четкую структуру **на русском** (Актуальность и цели. Материал и методы. Результаты. Выводы) и **английском языках** (Background. Materials and methods. Results. Conclusions).

**Обращаем внимание авторов** на то, что в соответствии с этическим кодексом журнала для обеспечения единообразия перевод фамилии, имени, отчества каждого автора на английский язык (в сведениях об авторах и списке литературы) осуществляется автоматически с использованием программы транслитерации в кодировке BGN (сайт translit.ru).

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисуночными подписями.

**Формулы** в тексте статьи **обязательно** должны быть набраны в редакторе формул Microsoft Word Equation (версия 3.0) или MathType. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. **Требования к оформлению списка литературы** на русские и иностранные источники: **для книг** – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; **для журнальных статей, сборников трудов** – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; **для материалов конференций** – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам статьи **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание и должность, место и юридический адрес работы (на русском и английском языках), e-mail, контактные телефоны (желательно сотовые).

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Рукопись, полученная редакцией, не возвращается. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

**Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.**

### **Уважаемые читатели!**

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные специальности журнала:

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

01.01.07 Вычислительная математика

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

01.04.02 Теоретическая физика

01.04.05 Оптика

01.04.10 Физика полупроводников

01.04.15 Физика и технология наноструктур, атомная и молекулярная физика

01.04.16 Физика атомного ядра и элементарных частиц

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. (841-2) 36-84-87. E-mail: [VolgaVuz@mail.ru](mailto:VolgaVuz@mail.ru)

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

---

### **ЗАЯВКА**

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 20\_\_ г.

№ 1 – \_\_\_\_\_ шт., № 2 – \_\_\_\_\_ шт., № 3 – \_\_\_\_\_ шт., № 4 – \_\_\_\_\_ шт.

Наименование организации (полное) \_\_\_\_\_

ИНН \_\_\_\_\_ КПП \_\_\_\_\_

Почтовый индекс \_\_\_\_\_

Республика, край, область \_\_\_\_\_

Город (населенный пункт) \_\_\_\_\_

Улица \_\_\_\_\_ Дом \_\_\_\_\_

Корпус \_\_\_\_\_ Офис \_\_\_\_\_

ФИО ответственного \_\_\_\_\_

Должность \_\_\_\_\_

Тел. \_\_\_\_\_ Факс \_\_\_\_\_ E-mail \_\_\_\_\_

Руководитель предприятия \_\_\_\_\_

(подпись)

(ФИО)

Дата «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.